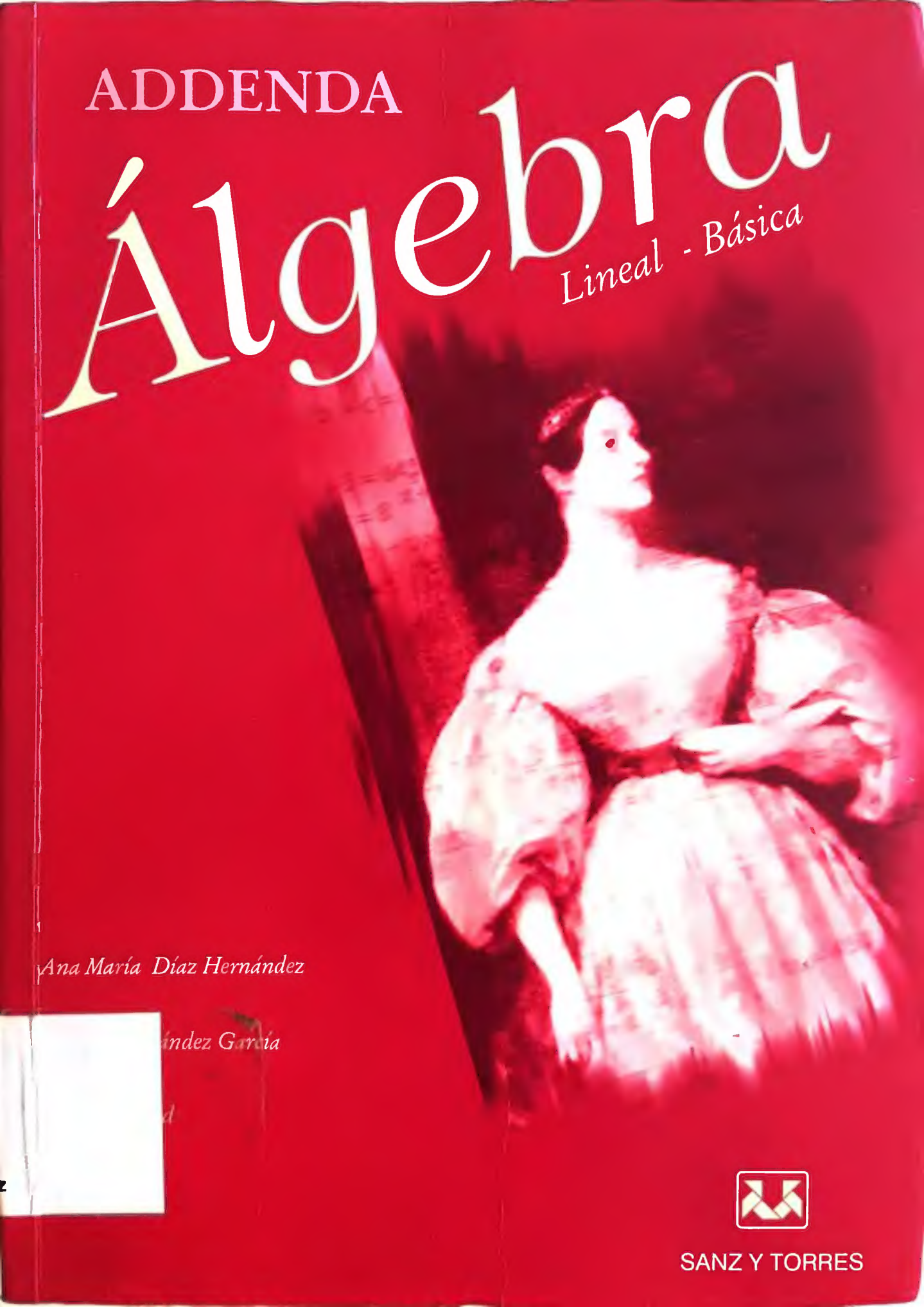
ADDENDA

Álgebra

Lineal - Básica



Ana María Díaz Hernández

ández García

SANZ Y TORRES

Addenda Álgebra (Lineal Básica)

Ana M.ª Díaz Hernández
Elvira Hernández García
Esther Gil Cid

SANZ Y TORRES

CONTENIDOS

- Notas útiles para trabajar con DERIVE
- Introducción a las herramientas de DERIVE necesarias en cada capítulo a través de ejemplos
- Ejercicios y problemas propuestos en exámenes de Álgebra (Informática) resueltos
- Los mismos ejercicios y problemas resueltos paso a paso con DERIVE
- Glosario de términos algebraicos utilizados en el texto
- El mismo contenido está recogido en un CD interactivo

ÍNDICE GENERAL

Prólogo, IX

Notas útiles para trabajar con DERIVE, 1

1. Espacios vectoriales, 5
2. Aplicaciones lineales, 27
3. Determinantes, 51
4. Sistemas de ecuaciones lineales, 75
5. Producto escalar, 119
6. Diagonalización, 139
7. Formas bilineales, formas cuadráticas, 167
8. Programación lineal, 181

Vocabulario, 213

PRÓLOGO

Esta Addenda persigue, principalmente, un objetivo: familiarizar a los estudiantes de primer curso de Ingeniería Informática con el uso de ordenadores para la resolución de problemas de Álgebra mediante programas de cálculo simbólico.

Y es que el siglo XX ha supuesto la incorporación a gran parte de la sociedad de una cantidad importante de tecnologías, algunas desarrolladas en épocas anteriores. En relación con las disciplinas técnicas en general, y las Matemáticas en particular, las más importantes son las calculadoras electrónicas (herederas de los ábacos y las antiguas máquinas de calcular) y los ordenadores. Y hoy en día es prácticamente impensable no tener una calculadora y un ordenador incorporados a las tareas habituales.

Las calculadoras automáticas supusieron una revolución para la realización de todo tipo de operaciones numéricas (en algunos casos, extremadamente laboriosas) y actualmente es impensable calcular un logaritmo o un coseno a partir de tablas, se han introducido de tal modo que la mayor parte de las cuentas las realizamos con calculadora.

Desde que se inventaron los primeros ordenadores, en la década de los 40, hasta su uso generalizado pasaron más de 40 años y hoy son imprescindibles para la mayor parte de las tareas que se realizan en sociedades desarrolladas. En este sentido, los ordenadores están suponiendo una "revolución" y gobiernan gran número de procesos. Las Matemáticas no han escapado a esta revolución, operaciones diversas, a menudo complicadas y tediosas, que antes teníamos que realizar a mano (como determinar la inversa de una matriz o calcular una integral), pueden realizarse, con ayuda de un ordenador, de forma mucho más cómoda, a partir de programas de cálculo simbólico.

Los programas de cálculo simbólico son programas para resolver problemas matemáticos, permiten trabajar con operaciones simbólicas o propias de esta materia. Por ejemplo, el número *e*, en DERIVE se expresa como "#*e*" y el símbolo identifica su valor exacto y no una aproximación 2,71...

Recientemente se han venido desarrollando gran cantidad de programas de este tipo, siendo los de uso más extendido DERIVE, MAPLE, MATLAB o MATHEMATICA. De la mayor parte se pueden obtener versiones libres en la red durante un tiempo limitado.

Para conseguir DERIVE encontrará información en estas direcciones:
http://www.upv.es/derive
http://www.derive-europe.com

Es obvia la importancia que para un futuro ingeniero tiene el conocimiento de programas de cálculo simbólico. Sin embargo, no creemos que su uso pueda suplir, en ningún momento, el estudio de las nociones teóricas y la resolución manual de problemas. El propio Bill Gates defiende que la inteligencia no está en los ordenadores sino en la cabeza humana que debe dirigir al ordenador. Los programas de cálculo simbólico son simples instrumentos y no maestros, no dicen por tanto cúal es el paso siguiente. El algoritmo que utiliza dicho programa para hacer cualquier operación es trasparente para el usuario.

Debido a que escapa a los objetivos de esta Addenda una descripción exhaustiva de los principales programas de cálculo simbólico, hemos intentado aproximarnos a este tipo de herramientas a través de una de ellas. En este sentido, nos hemos inclinado por DERIVE por la gran cantidad de ventajas que tiene y el pequeño número de inconvenientes, ya que es un programa de amplia difusión, y aúna una gran potencia de cálculo, portabilidad y bajo coste. DERIVE es el programa preferido en el ámbito docente debido a que es muy fácil de utilizar, en el sentido de que el objeto matemático no queda obscurecido por la herramienta informática. Además permite la resolución de problemas de tipo numérico y simbólico y es programable. Sus prestaciones son más que suficientes para un primer curso de nivel universitario, aunque es cierto que su interface de usuario no era demasiado cómodo en versiones anteriores, si bien ha sido mejorado en las más recientes funcionando bajo el entorno Windows. Aunque permite la resolución de problemas de Matemáticas Superiores, en las páginas impresas de la Addenda nos hemos centrado en la resolución de exámenes anteriores.

Adicionalmente, en el CD-ROM adjunto a la Addenda se incluyen, los exámenes resueltos con DERIVE, y los capítulos correspondientes al libro que van introduciendo las notaciones en DERIVE, para que así el manejo del programa DERIVE, sea más fácil, nuevos problemas resueltos con este mismo programa, así como un extenso vocabulario de los principales conceptos que se usan a lo largo de este curso de Álgebra, en formato html y que facilitará el aprendizaje de la materia que conforma este curso de Álgebra Lineal.

NOTAS ÚTILES PARA TRABAJAR CON DERIVE

¿Qué formato se utiliza para los ficheros DERIVE?

Los ficheros generados por DERIVE tienen extensión .dfw y para leerlos es necesario tener instalado el programa DERIVE.

Antes de leer los archivos ".dfw"*

Vamos a explicar a través de un ejemplo cómo se deben entender las notas explicativas de un documento de DERIVE y qué hay que hacer para generarlo.

Por ejemplo, cuando aparece:

$x - y + z = 0$

Resolver > Expresión

(Variables *x, y, z,* Algebraico, Real) > Sí

=

el proceso seguido para obtenerlo ha sido:

para escribir la ecuación:

1. Situar el cursor en la línea de edición, (es la ventana inferior):
2. Escribir $x - y + z = 0$
3. (Intro ↵)

para resolver la ecuación:

(En la barra de herramientas **BH**)

4. Seleccionar

   Resolver > Expresión

   (Variables *x*, *y*, *z*, Algebraico, Real) > Sí

(En la barra de herramientas **BH**)

5. Seleccionar

   =

El esquema de un proceso está resumido en la tabla siguiente:

>	Elegir la opción que viene a continuación
Cambio de línea	Intro ↵
F3	Aparece en la línea de edición lo iluminado
=	Simplificación normal

Con la barra de herramientas (BH) se pueden elegir botones que aceleran el proceso, por ejemplo:

Simplificación > Normal	=
Insertar > Gráfica	Botón de ejes coordenadas.
Insertar > Vector	[•, •, •, .., ..,]

Para ver que función tiene cada Botón

Es suficiente situar el ratón encima de él.

De algunos comandos o funciones utilizados y no explicados se encuentra la información necesaria en la opción AYUDA.

Admite variables lógicas:

IDENTICAL? (*u, v*) (se simplifica a "True" si la expresión "*u*" es idéntica a "*v*").
LOGICAL? (*u*) (se simplifica a "True" si la expresión "*u*" es un valor lógico de verdad).

Admite el uso de operadores lógicos:

Intersección, unión, ...

No distingue la variable "*A*" de la variable "*a*"

Una variable es como una caja, vaciarla, en lenguaje informático, es limpiar el valor de la variable

Para ello se escribe el nombre de la variable y a continuación Intro (↵).

Cuando se ha activado el modo una vez

Si se ha activado una vez el modo Simplificación, Trigonometría, Auto, ..., se mantiene activo mientras dure la sesión.

Cualquier letra no predefinida por el programa (e, i...)

Es considerada como un escalar que puede ser utilizado como constante o variable.

Para seleccionar un trozo de texto:

Se procede como en Word, se copia y pega.

Insertar una línea

Después de escribir en la línea de edición para que quede insertado en la hoja correspondiente, basta con hacer INTRO.

Ver cómo se ha obtenido una expresión

Basta con iluminarla con el ratón o con las teclas → ↓ ↑ ←, la forma de obtener la expresión viene escrita en la esquina inferior derecha de la ventana de álgebra en la cual estamos.

Ver una gráfica insertada en una ventana de Álgebra

Cuando aparece, para verla en una ventana 2D basta hacer doble click sobre ella.

CAPÍTULO 1

ESPACIOS VECTORIALES

1.1. El espacio vectorial real

Representación de un vector

(Es decir, un vector interpretado como una matriz de una fila o columna)
Se representa:

o bien con el icono:

Introducir vector

o bien con:

Editar > Vector

A continuación:

(se introduce el número de elementos) > Sí
(se introduce elemento a elemento) > Sí

También se puede editar directamente en la línea de edición:

[$x1$, $x2$, ..., xn]

donde xi son las coordenadas del vector.

Ejemplo

BH

[1, 2, 3, 4]

#1: [1, 2, 3, 4]

Vector fijo:

Es la representación geométrica de un vector mediante la flecha que une el origen y el vértice; ambos puntos se llaman extremos.

Consideremos como origen el vector cero.

En el plano:
(abrimos una ventana 2D).

Para visualizarlo mejor se activa la siguiente opción:

BH

Seleccionar > *Rango de la gráfica* > *Relación de aspecto (Restablecer* > *Sí)*

Para unir puntos:

BH

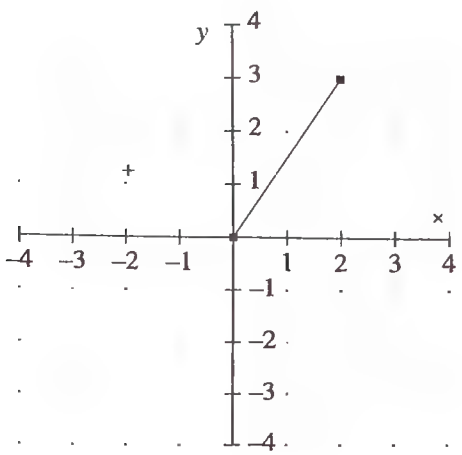
Opción > *Pantalla* > *Puntos (unir puntos, Sí, Aceptar)*

Si se representa el vector fijo (2, 3):

BH

[0, 0; 2, 3]
Insertar > *Gráfica*

#2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$



Ahora en el espacio:

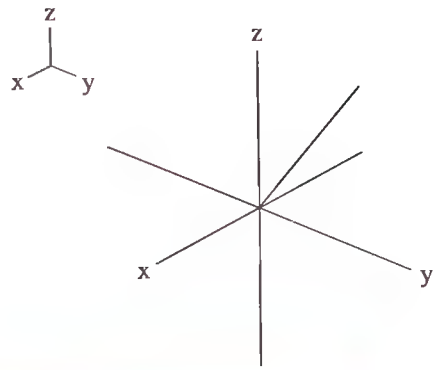
Se abre una ventana 3D:
(Después de elegir el color de la gráfica, con el comando Opciones, y hacer click, con el ratón, dos veces en el lado derecho)

Si se representa el vector fijo (1, 1, 2):

BH

[0, 0, 0; 1, 1, 2]
Insertar > Gráfica

#3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$



Suma de vectores

El procedimiento es el siguiente:

En la línea de edición:

[$x1$, $x2$, ..., xn] + [$y1$, $y2$, ..., yn]
=

Ejemplo

BH

[1, 2] + [3, 4]
=

#4: [1, 2] + [3, 4]

#5: [4, 6]

Observacion

Si se suman vectores de distintas dimensiones (lo cual no tiene sentido), el resultado que devuelve es la misma suma.

BH

[1, 2] + [1, 3, 4]
=

#6: [1, 2] + [1, 3, 4]

#7: [1, 3, 4] + [1, 2]

Con el operador "–", se pueden restar vectores.

Multiplicación de vectores por un escalar

Con el operador "*" o bien sin operador, se puede multiplicar un escalar por un vector.

Ejemplo

BH

2* [1, 3, 5] (también, 2 [1, 3, 5])
=

#8: 2 · [1, 3, 5]

#9: [2, 6, 10]

Regla del paralelogramo

Se trata de una técnica para representar gráficamente el vector suma de otros dos vectores.
Se verá el procedimiento con un ejemplo.
Para representar la suma de (1, 3) y (4, 2) los pasos a realizar son:

Se abre una ventana 2D.

Para visualizarlo mejor y para unir puntos se activan las opciones anteriormente dadas.

Se representan los vectores (1, 3), (4, 2) y el vector suma (5, 5).

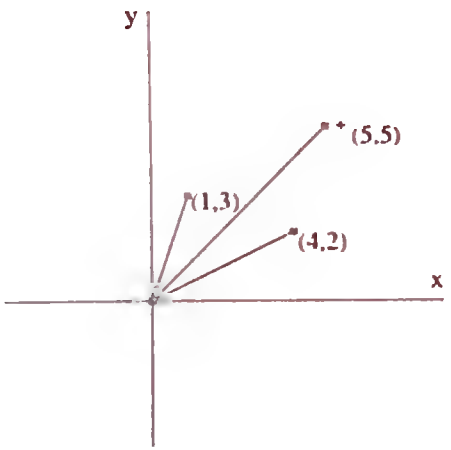
BH

[0, 0; 1, 3]
Insertar > gráfica
[0, 0; 4, 2]
Insertar > gráfica
[0, 0; 5, 5]
Insertar > gráfica

#10: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

#11: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

#12: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

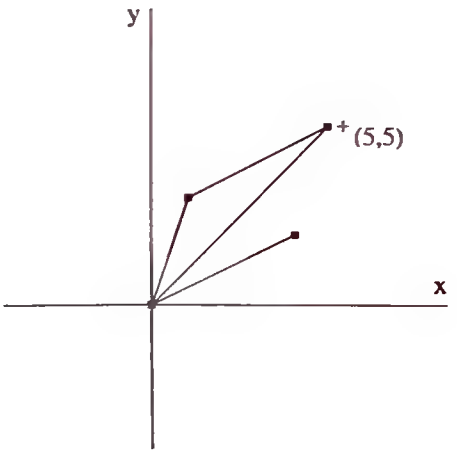


Se puede comprobar que el vector de extremo (5, 5) es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores de extremos (1, 3) y (4, 2).

BH

[1, 3; 4 + 1, 2 + 3]
Insertar > Gráfica

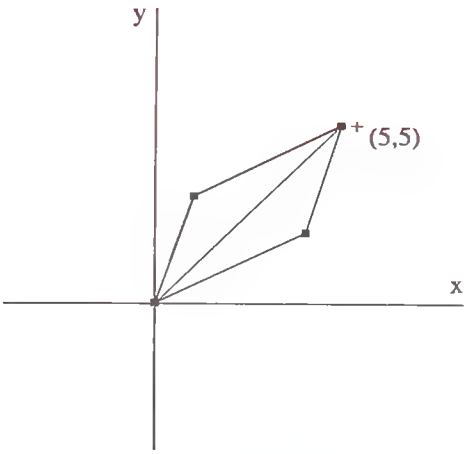
#13: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4+1 & 2+3 \end{bmatrix}$



BH

[4, 2; 1 + 4, 3 + 2]
Insertar > Gráfica

#14: $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1+4 & 3+2 \end{bmatrix}$



Y por tanto se obtiene un paralelogramo (de ahí el nombre).

Extraer coordenadas de un vector

Se usa el operador "SUB". Se introduce de la siguiente manera:

En la línea de edición:

[*a*, *b*, *c*, *d*] SUB 2
=

Aparece como

#15: $[a, b, c, d]_2$

#16: *b*

También se puede hacer frente con la función "ELEMENT", por ejemplo:

BH

ELEMENT ([*a*, *b*, *c*, *d*], 2)
=

#17: ELEMENT ([*a*, *b*, *c*, *d*], 2)

#18: *b*

Además se puede borrar, insertar, reemplazar una coordenada con los comandos "DELETE", "INSERT", "REPLACE", respectivamente.

1.3. Subespacios vectoriales

Vectores linealmente dependientes (l. d.) o independientes (l. i.)

Para comprobar si un conjunto de vectores es l. d. o l. i., se aplican las definiciones 1.3.6, 1.3.7.

Ejemplo 1.3.5

a)

BH

$\lambda\,[1; 2; 0] + \mu\,[0; 0; 0] + \gamma\,[4; 5; 6] = [0; 0; 0]$
Resolver > Expresión (Variables, λ, μ, γ, Algebraica, Real)
> Resolver

#19:
$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#20:
$$\text{SOLVE}\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\gamma, \lambda, \mu], \text{Real}\right)$$

#21:
$$[\gamma = 0 \wedge \lambda = 0]$$

b)

BH

$\lambda\,[1; 0; 0; 0] + \mu\,[0; 1; 0; 0] + \gamma\,[0; 0; 1; 0] + \delta\,[0; 0; 0; 1] = [0; 0; 0; 0]$
Resolver > Expresión (Variables, λ, μ, γ, Algebraica, Real)
> Resolver

#22:
$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#23: $\text{SOLVE}\left(\lambda\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\mu\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\gamma\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\delta\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},[\delta,\gamma,\lambda,\mu],\text{Real}\right)$

#24: $[\delta=0\wedge\gamma=0\wedge\lambda=0\wedge\mu=0]$

c)

BH

$\lambda\,[1;4;7]+\mu\,[5;-3;4]=[0;0;0]$
Resolver > Expresión (Variables, λ, μ, Algebraica, Real)
> Resolver

#25: $\lambda\cdot\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+\mu\cdot\begin{bmatrix}5\\-3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

#26: $\text{SOLVE}\left(\lambda\cdot\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+\mu\cdot\begin{bmatrix}5\\-3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},[\lambda,\mu],\text{Real}\right)$

#27: $[\lambda=0\wedge\mu=0]$

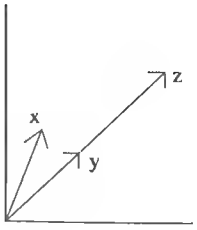
Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

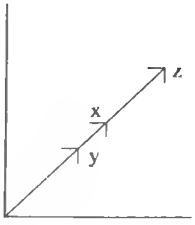
Dados los vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^3$, que son linealmente dependientes, de entre las siguientes afirmaciones, elija las correctas: *a)* Al menos uno es combinación lineal de los otros. *b)* Cualquiera de los tres es combinación lineal de los otros dos. *c)* El subespacio que generan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ es de dimensión dos.

Solución:

a) Cierta. b) Falsa:



c) Falsa:



$\dim < \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} > = 1$.

Ejercicio 2

Determínese para qué valores de k los vectores $(1, -2, k)$, $(3, 0, -2)$, $(2, -1, -5)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Para que formen base, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = -8$.

Formarán base $\forall k \in \mathbb{R} - \{-8\}$

Ejercicio 3

Sean L_1 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y L_2 el generado por $(1, 1, 1)$.

a) Justifíquese porqué $L_1 \cap L_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y determínese dicho subespacio.

b) Explíquese la diferencia que hay entre $L_1 \cup L_2$ y $L_1 + L_2$

c) Descompóngase el vector $(2, 5, 9)$ como suma de un vector de L_1 y uno de L_2 y explíquese si es posible hacerlo de más modos.

Solución:

a) Sean $\overline{u}, \overline{v} \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} \in L_1 \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L_1$ y $\alpha\overline{u} + \beta\overline{v} \in L_2$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L_2 \Rightarrow \alpha\overline{u} + \beta\overline{v} \in L_1 \cap L_2 \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall \overline{u}, \overline{v} \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2$ es subespacio.

Las ecuaciones implícitas de L_1 son $x_2 = 0$; Las ecuaciones implícitas de L_2 son: $x_1 = x_2 = x_3$. Las ecuaciones implícitas $L_1 \cap L_2$ son: $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow$ El subespacio $L_1 \cap L_2$ es el subespacio $\{(0, 0, 0)\}$.

b) $L_1 \cup L_2$ es el conjunto de vectores que pertenecen a L_1 o a L_2, y en general no es un subespacio vectorial.

$L_1 + L_2$ es el conjunto de vectores obtenidos al sumar uno de L_1 con uno de L_2, y siempre es un subespacio vectorial.

En este caso, sean $\overline{u} = (1, 0, 0) \in L_1$, $\overline{v} = (1, 1, 1) \in L_2$, $\overline{u} + \overline{v} = (2, 1, 1) \notin L_1 \cup L_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ no es subespacio.

c) $L_1 + L_2 = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1) + \mu(1, 1, 1)\} = \{(\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu), \forall \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}\}$
$(2, 5, 9) = (\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu) \Rightarrow 2 = \alpha + \mu, 5 = \mu, 9 = \beta + \mu \Rightarrow \alpha = -3, \beta = 4, \mu = 5$
$(2, 5, 9) = (-3, 0, 4) + (5, 5, 5)$; $(-3, 0, 4) \in L_1$, $(5, 5, 5) \in L_2$.

La solución del sistema de ecuaciones anterior es única; por tanto, no se puede descomponer de otro modo el vector dado como suma de un vector de L_1 y otro de L_2. A esta misma conclusión habríamos llegado, si hubiéramos dicho que la suma de estos dos subespacios es directa porque su intersección es (0, 0, 0).

Ejercicio 4

Sean E es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por (1, 0, –1) y (0, 1, –1), y F por (1, 1, –2), (2, 1, –3), (0, 1, –1). De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas, si existen: *a)* $E \subset F$ y $F \not\subset E$; *b)* $E \subset F$ y $F \subset E$; *c)* $F \subset E$ y $E \not\subset F$.

Solución:

$$\{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = -\alpha - \beta\} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\langle (1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1) \rangle = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = \alpha + 2\beta, x_2 = \alpha + \beta + \delta, x_3 = -2\alpha - 3\beta - \delta\}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow E = F,$$

por tanto, *es cierta b).*

Ejercicio 5

De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen. Para que el vector (1, 0, x, y) pertenezca al subespacio engendrado por (1, 4, 5, 2) y (1, 2, 3, –1), los valores de x e y deben ser: *a)* $x = 4, y = 1$. *b)* $x = 1, y = -4$. *c)* $x = -1, y = 4$.

Solución:

$$(1, 0, x, y) = \alpha(1, 4, 5, 2) + \beta(1, 2, 3, -1) \Rightarrow \alpha = -1; \beta = 2; x = 1; y = 4.$$

Es válida la *opción b).*

Ejercicio 6

Sabiendo que $\{P(x), P'(x), P''(x), P'''(x)\}$ es una base del espacio vectorial de polinomios reales de grado ≤ 3 y una variable x, y siendo $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, se piden las coordenadas respecto a la base dada el polinomio $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$.

Solución:

$$x^3 + 4x^2 + 9x + 10 = \alpha P(x) + \beta P'(x) + \delta P''(x) + \varepsilon P'''(x) \Rightarrow \alpha = \beta = \delta = \varepsilon = 1.$$

Ejercicio 7

¿Qué valores deben tener m y n para que el vector $(1, -1, m, n) \in \mathbb{R}^4$, pertenezca al subespacio vectorial generado por los vectores {(2, 1, 3, 4), (1, 2, –1, 2), (1, –1, 4, 2)}?

Solución:

Observemos que

$$(2, 1, 3, 4) - (1, 2, -1, 2) = (1, -1, 4, 2) \Rightarrow$$

El subespacio que generan los dos primeros es el mismo que el generado por los tres dados.

$$(1, -1, m, n) = a\,(2, 1, 3, 4) + b\,(1, 2, -1, 2) \Rightarrow 1 = 2a + b;\ -1 = a + 2b;\ m = 3a - b;\ n = 4a + 2b \Rightarrow a = 1;\ b = -1;\ m = 4;\ n = 2.$$

Ejercicio 8

Sea A = {(2, 1, 3), (–1, 2, 3), (0, 7, 7), (5, 0 –5)}. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen: *a) A* es base de $\mathbb{R}^3$; *b)* Existe una base de $\mathbb{R}^3$ que contiene al menos dos vectores de *A; c) A* contiene una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) Falsa; *b) Cierta; c) Cierta.*

Ejercicio 9

Escríbase una base del espacio vectorial de polinomios de grado ≤4 con coeficientes en $\mathbb{R}$ que contenga al mayor número posible de elementos de *P*, siendo

$$P = \left\{P_1 = 3 + x^4,\ P_2 = 5 - x - x^2,\ P_3 = 2x^3,\ P_4 = 8 - x - x^2 + 2x^3 + x^4,\ P_5 = 3 + 4x^3 + x^4\right\}$$

Solución:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Posible base

$$\left\{3 + x^4,\ 5 - x - x^2,\ 2x^3,\ 1,\ x\right\}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Ejercicio 10

De entre los siguientes valores de (*a, b, c*), elíjase la opción correcta para que el vector cuyas coordenadas en la base canónica son (2, 2, 2), tenga las mismas coordenadas en la base B_1 = {(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)} que en la base B_2 = {(1, 1, 0), (0, 1, 1), (*a, b, c*)}: *a)* (–1, 0, –1). *b)* (1, 0, 1). *c)* (1, 1, 1).

Solución:

El vector (2, 2, 2) en la base B_1 tiene como coordenadas (1, 1, 1), para que en la base B_2 tenga las mismas coordenadas ha de cumplirse que (2, 2, 2) = 1 (1, 1, 0) + (0, 1, 1) + 1 (a, b, c). Si se resuelve el sistema que resulta al igualar componente a componente se obtiene: $(a, b, c) = (1, 0, 1)$. Luego es *cierta la opción b.*

Ejercicio 11

De entre opciones siguientes, elíjase la verdadera, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes: *a)* si $x = 1$, $y = 5$. *b)* si $x = 5$ e $y = 16$. *c)* Nunca son linealmente dependientes.

Solución:

Para que sean linealmente dependientes se tiene que cumplir que: $\exists \alpha, \beta$ con $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$, tal que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 2\beta = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 5 \\ y = 16 \end{matrix} \right. \Rightarrow$$

a) y *c)* son falsas y *b) es Verdadera.*

Ejercicio 12

En el espacio vectorial de las funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de entre las opciones siguientes, elíjase la verdadera: *a)* El sen $\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ depende linealmente de sen (x), cos (x). *b)* Los vectores sen $\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, sen (x), cos (x) son linealmente independientes. *c)* Los vectores sen (x), cos (x) son linealmente dependientes.

Solución:

Como

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\,x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\,x$$

resulta que existe una combinación lineal de coeficientes no nulos,

$$\sqrt{2}\ \cos x+\sqrt{2}\ \text{sen}\,x-2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Por tanto, la opción *correcta es a).*

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

En una ventana 2D, activamos la opción de unir puntos:

BH

Opciones > Pantalla > Puntos
Unir Puntos, Sí > Aceptar

B) Es falsa.

Contraejemplo:

Sean (2, 2), (1, 4), (2, 8) tres vectores (los cuales son linealmente dependientes).
Se abre una ventana 2D.

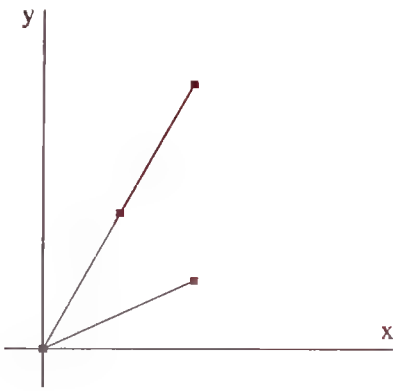
BH

[0, 0; 2, 2]
Insertar > Gráfica (F4)
[0, 0; 1, 4]
Insertar > Gráfica (F4)
[0, 0; 2, 8]
Insertar > Gráfica (F4)

#1: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

#2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

#3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

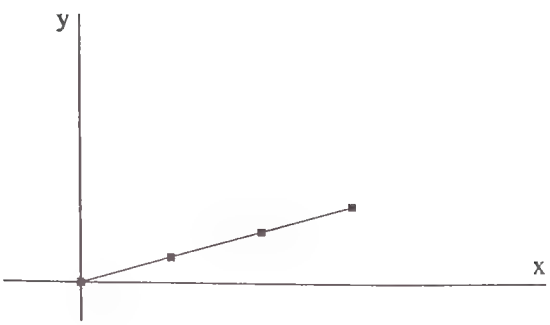


Caso c) falso.

BH

[0, 0; 1, 1; 2, 2; 3, 3]
Insertar > Gráfica (F4)

#4: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$



Ejercicio 2

Bastará ver cuando el determinante es 0 y quitar esos puntos:

BH

DET ([1, –2, *K*; 3, 0, –2; 2, –1, –5]) = 0
=
Resolver > Expresión (variable k, Algebraico, Real) > Resolver

#5:

$$\text{DET}\begin{bmatrix} 1 & -2 & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} = 0$$

#6: $-3 \cdot k - 24 = 0$

#7: SOLVE $(-3 \cdot k - 24 = 0, k, \text{Real})$

#8: $k = -8$

Ejercicio 3

Por razones de contenido los casos *a)* y *b)* no se solucionarán y se tratará exclusivamente el apartado *c)*.

Siguiendo la notación, bastará resolver la siguiente expresión:

BH

$[2, 5, 9] = [\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu]$
Resolver > Expresión (variables, α, b, m, Algebraico, Real)
> Resolver

#9: $[2, 5, 9] = [\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu]$

#10: SOLVE $([2, 5, 9] = [\alpha + \mu, \mu, \beta + \mu], [\alpha, \beta, \mu], \text{Real})$

#11: $[\alpha = -3 \wedge \beta = 4 \wedge \mu = 5]$

Ejercicio 4

Se calculará el espacio asociado a cada sistema generador:
Ecuaciones paramétricas del espacio <(1, 0, –1), (0, 1, –1)>:

BH

$[x; y; z] = \alpha\,[1; 0; -1] + \beta\,[0; 1; -1]$
=

#12:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

#13:
$$\begin{bmatrix} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - \beta \end{bmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas del espacio < (1, 1, –2), (2, 1, –3), (0, 1, –1) >:

BH

$$[x; y; z] = \alpha\,[1; 1; -2] + \beta\,[2; 1; -3] + \delta\,[0; 1; -1]$$
=

#14:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

#15:
$$\begin{bmatrix} x = \alpha + 2 \cdot \beta \\ y = \alpha + \beta + \delta \\ z = -2 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta - \delta \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5

Se resuelve la expresión que resulta de imponer la condición de pertenecer al subespacio:

BH

$$[1, 0, x, y] = \alpha\,[1, 4, 5, 2] + \beta\,[1, 2, 3, -1]$$

Resolver > Expresión
variables (α, β, x, y) > *Algebraico > Real > Resolver*

#16:
$$[1, 0, x, y] = \alpha \cdot [1, 4, 5, 2] + \beta \cdot [1, 2, 3, -1]$$

#17: SOLVE $([1, 0, x, y] = \alpha \cdot [1, 4, 5, 2] + \beta \cdot [1, 2, 3, -1], [x, y, \alpha, \beta],$ Real)

#18: $[x = 1 \wedge y = -4 \wedge \alpha = -1 \wedge \beta = 2]$

Ejercicio 6

Se define el polinomio $P(x)$, con cuyas derivadas se va a formar la base:

BH

$$P(x) := x\text{^}3 + x\text{^}2 + x + 1$$

#19: $P(x) := x^3 + x^2 + x + 1$

Se usará la función *DIF*, para calcular las derivadas:

BH

$\alpha P(x) + \beta \text{DIF}(P(x), x) + \delta \text{DIF}(P(x), x, 2) + \varepsilon \text{DIF}(P(x), x, 3)$
=

#20: $\alpha \cdot P(x) + \beta \cdot \frac{d}{dx} P(x) + \delta \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^2 P(x) + \varepsilon \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^3 P(x)$

#21: $\alpha \cdot x^3 + x^2 \cdot (\alpha + 3 \cdot \beta) + x \cdot (\alpha + 2 \cdot \beta + 6 \cdot \delta) + \alpha + \beta + 2 \cdot (\delta + 3 \cdot \varepsilon)$

A continuación se calculan las coordenadas del polinomio $x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ dado en esa base, que serían $(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon)$:

Según el resultado anterior, al igualar coordenada a coordenada se obtiene el sistema:

BH

Resolver > Sistema (4 ecuaciones) > Sí
$1 = \alpha$
$4 = \alpha + 3 \cdot \beta$
$9 = \alpha + 2 \cdot \beta + 6 \cdot \delta$
$10 = \alpha + \beta + 2(\delta + 3 \cdot \varepsilon)$
Variables, α, β,δ,ε, Algebraica, Real)
> Resolver

#22: SOLVE $([1 = \alpha, 4 = \alpha + 3 \cdot \beta, 9 = \alpha + 2 \cdot \beta + 6 \cdot \delta, 10 = \alpha + \beta + 2 \cdot (\delta + 3 \cdot \varepsilon)], [\alpha, \beta, \delta, \varepsilon])$

#23: $[\alpha = 1 \wedge \beta = 1 \wedge \delta = 1 \wedge \varepsilon = 1]$

Ejercicio 7

Para que el vector pertenezca al subespacio generado debe de cumplirse:

BH

$[1, -1, m, n] = \alpha[2, 1, 3, 4] + \beta[1, 2, -1, 2] + \gamma[1, -1, 4, 2]$
=
Resolver > Expresión
(Variables n, m, α, β, γ, Algebraico, Real)
> Resolver

#24: $[1, -1, m, n] = \alpha \cdot [2, 1, 3, 4] + \beta \cdot [1, 2, -1, 2] + \gamma \cdot [1, -1, 4, 2]$

#25: $[1 = 2 \cdot \alpha + \beta + \gamma, -1 = \alpha + 2 \cdot \beta - \gamma, m = 3 \cdot \alpha - \beta + 4 \cdot \gamma, n = 4 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma]$

#26: SOLVE ($[1 = 2 \cdot \alpha + \beta + \gamma, -1 = \alpha + 2 \cdot \beta - \gamma, m = 3 \cdot \alpha - \beta + 4 \cdot \gamma$, $n = 4 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma]$, $[\alpha, \beta, \gamma, m, n]$), Real)

#27: $[\alpha + \gamma = 1 \wedge \beta - \gamma = -1 \wedge m = 4 \wedge n = 2]$

Ejercicio 8

a) No forman base porque son 4 vectores (deberían ser 3 vectores).
b) Basta ver que de los 4 vectores hay al menos 2 linealmente independientes. Considerando los tres primeros, se obtiene:

BH

DET ([2, 1, 3; –1, 2, 3; 0, 7, 7])
=

#28: $$\text{DET}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

#29: –28

Por tanto *b)* y *c)* son ciertas.

Ejercicio 9

Se calcula el rango de la matriz que se obtiene al expresar cada polinomio en la base canónica, en filas:

BH

RANK ([3, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 2, 0; 5, –1, –1, 0, 0; 8, –1, –1, 2, 1; 3, 0, 0, 4, 1])
=

#30: $$\text{RANK}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

#31: 3

Existen infinitas bases posibles, que contienen los tres polinomios linealmente independientes. Se comprueba que la base que se propone, lo es. En efecto:

BH

RANK ([3, 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 2, 0; 5, –1, –1, 0, 0; 0, 1, 0, 0, 0; 1, 0, 0, 0, 1])
=

#32:

$$\text{RANK}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#33: 5

Ejercicio 10

El sistema de ecuaciones es:

BH

$[2 = 1 + 0 + a;\ 2 = 1 + 1 + b;\ 2 = 0 + 1 + c]$

Resolver > Sistema (variables a, b, c, Algebraico, Real) > Resolver

#34:

$$\begin{bmatrix} 2 = 1 + 0 + a \\ 2 = 1 + 1 + b \\ 2 = 0 + 1 + c \end{bmatrix}$$

#35:

$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2 = 1 + 0 + a \\ 2 = 1 + 1 + b \\ 2 = 0 + 1 + c \end{bmatrix}, [a, b, c], \text{Real}\right)$$

#36: $[a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = 1]$

Ejercicio 11

Se definen las matrices:

BH

Editar > *Expresión*
$A:=[[2,3],[x,y]]$
$B:=[[1,4],[5,2]]$
$C:=[[1,2],[3,4]]$

#37: $A:=\begin{bmatrix}2 & 3\\ x & y\end{bmatrix}$

#38: $B:=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

#39: $C:=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

Caso A) Sustituimos x e y:

BH

Iluminamos A
Simplificar > *Sustituir variable* ($x=1$) > *Sí*
Simplificar > *Sustituir variable* ($y=5$) > *Simplificar*

#40: $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

Definimos el dominio de los parámetros v, w:

BH

Definir > *Dominio de una variable*
(nombre v, dominio real, intervalo todos) > *Sí*
(análogamente para w)

#41: $v:\in$ Real

#42: $w:\in$ Real

Editamos y resolvemos el sistema:

BH

Editar > Expresión > $A = vB + wC$
Simplificar > Normal
Resolver > Expresión (variables, v, w, Algebraico, Real)

#43: $A = v \cdot B + w \cdot C$

#44: $\begin{bmatrix} 2 = v + w & 3 = 4 \cdot v + 2 \cdot w \\ 1 = 5 \cdot v + 3 \cdot w & 5 = 2 \cdot v + 4 \cdot w \end{bmatrix}$

#45: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2 = v + w & 3 = 4 \cdot v + 2 \cdot w \\ 1 = 5 \cdot v + 3 \cdot w & 5 = 2 \cdot v + 4 \cdot w \end{bmatrix}, [v, w]\right)$

#46: []

Como b) Análogamente.

BH

Iluminamos A
Simplificar > Sustituir variable ($x = 5$ > *Sí*)
Simplificar > Sustituir variable ($y = 16$ > *Simplificar se repiten los pasos del caso a)*

#47: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$

#48: $A = v \cdot B + w \cdot C$

#49: $\begin{bmatrix} 2 = v + w & 3 = 4 \cdot v + 2 \cdot w \\ 5 = 5 \cdot v + 3 \cdot w & 16 = 2 \cdot v + 4 \cdot w \end{bmatrix}$

#50: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2 = v + w & 3 = 4 \cdot v + 2 \cdot w \\ 5 = 5 \cdot v + 3 \cdot w & 16 = 2 \cdot v + 4 \cdot w \end{bmatrix}, [v, w]\right)$

#51: []

Se comprueba si el sistema tiene solución:
Editamos y resolvemos el sistema.

BH

$[2, 3; x, y] = vB + wC$
=
Resolver > Expresión > (variables, x, y, v, w)
=

#52: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{bmatrix} = v \cdot B + w \cdot C$

#53: $\begin{bmatrix} 2 = v + w & 3 = 4 \cdot v + 2 \cdot w \\ x = 5 \cdot v + 3 \cdot w & y = 2 \cdot v + 4 \cdot w \end{bmatrix}$

#54: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2 = v + w & 3 = 4 \cdot v + 2 \cdot w \\ x = 5 \cdot v + 3 \cdot w & y = 2 \cdot v + 4 \cdot w \end{bmatrix}, [w, x, y, v]\right)$

#55: $\left[w = \frac{5}{2} \wedge x = 5 \wedge y = 9 \wedge v = -\frac{1}{2}\right]$

Ejercicio 12

Se calcula sen (Pi/4 + *x*):

BH

Definir > *Preferencias de Simplificación* > *(Trigonometría, Expand)*
sin (Pi/4 + *x*)
=

#56: $\text{SIN}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

#57: $\frac{\sqrt{2} \cdot \text{COS}(x)}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \text{SIN}(x)}{2}$

Caso *c)* veamos si tiene solución $\alpha \sin(\pi/4 + x) + \beta \cos(x) = 0$:

BH

$\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0$
Resolver > *Expresión (variables α, β, Algebraico, Real)* > *Resolver.*

#58: $\beta \cdot \text{COS}(x) + \alpha \cdot \text{SIN}(x) = 0$

#59: $\text{SOLVE}(\alpha \cdot \text{SIN}(x) + \beta \cdot \text{COS}(x) = 0, [\beta, \alpha], \text{Real})$

CAPÍTULO 2

APLICACIONES LINEALES

2.1. Aplicaciones lineales

Las aplicaciones lineales son funciones; por tanto UNA APLICACIÓN LINEAL SE DEFINE COMO UNA FUNCIÓN.

(Para comprobar que es aplicación lineal se tiene que hacer en dos fases:
Calculando por separado $\alpha f(x, y, z)$ y $\beta f(x', y', z')$, sumando ambas y comparando el resultado con $f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$; véanse exámenes).

Ejemplo 2.1.2 del libro:

(cambiando el nombre de las coordenadas)
La aplicación se define:

a) Directamente en la línea de edición:

BH

$f(x, y, z) := [x, y, 0]$

#1: $f(x, y, z) := [x, y, 0]$

Se calcula la imagen del vector (2, 3, 7):

BH

$f(2, 3, 7)$
$=$

#2: $f(2, 3, 7)$

#3: $[2, 3, 0]$

b) Con la BH:

BH

Definir > Función (Nombre de la función y argumentos, f (x, y, z) Valor, [x, y, 0]) > Sí

Los argumentos deben ir separados por comas y entre paréntesis.

#4: $f(x, y, z) := [x, y, 0]$

Para limpiar el valor de una función sería:
nombre y argumentos de la función seguidos de : =

Ejemplo

BH

$f(x, y, z) :=$

#5: $f(x, y, z) :=$

2.2. Subespacios distinguidos: núcleo e imagen

Cálculo de la imagen

Se resuelve la expresión que resulta de poner la definición de imagen.

Ejemplo 2.2.1

BH

$f(a, b, c) := [a + b, b - a, c, 0]$
$[x, y, z, t] = f(a, b, c)$

#6: $f(a, b, c) := [a + b, b - a, c, 0]$

#7: $[x, y, z, t] = f(a, b, c)$

#8: $[x = a + b, y = b - a, z = c, t = 0]$

y se resuelve:

BH

Resolver > Expresión (variables x, y, z, t, Algebraico, Real)
> Resolver

#9: SOLVE ($[x = a + b, y = b - a, z = c, t = 0]$, [x, y, z, t], Real)

#10: $[x = a + b \wedge y = b - a \wedge z = c \wedge t = 0]$

Cálculo del núcleo

(En el mismo Ejemplo 2.2.1).
Se impone la condición de núcleo:

BH

$f(a, b, c) = [0, 0, 0, 0]$
=
Resolver > Expresión (Variables, a, b, c, Algebraico, Real)
> Resolver

#11: $f(a, b, c) = [0, 0, 0, 0]$

#12: $[a + b = 0, b - a = 0, c = 0, 0 = 0]$

#13: SOLVE ($[a + b = 0, b - a = 0, c = 0, 0 = 0]$, [a, b, c], Real)

#14: $[a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0]$

2.3. Aplicaciones lineales y matrices

Cálculo de las ecuaciones de una aplicación lineal

Ejemplo 2.3.1

Para facilitar la notación se cambian los nombres de las coordenadas $(x \downarrow 1, x \downarrow 2) = (a, b)$:

BH

$f(a, b) := a\,[1, 2, 1] + b\,[1, 1, 0]$
=

#15: $f(a, b) := a \cdot [1, 2, 1] + b \cdot [1, 1, 0]$

#16: $[a + b,\ 2 \cdot a + b,\ a]$

Para calcular la imagen de un vector, por ejemplo de (2, 0):

BH

$f(2, 0)$
=

#17: $f(2, 0)$

#18: $[2, 4, 2]$

2.3.2. Matriz asociada a una aplicación lineal

Una matriz se puede considerar como un vector cuyas c oordenadas son sus filas, por ello podemos obtener la matriz asociada a una aplicación lineal de la siguiente manera:
Si $\{e \downarrow 1, e \downarrow 2, \ldots e \downarrow n\}$ es una base y f la aplicación lineal, la matriz asociada es:

BH

$[[f(e \downarrow 1)], [f(e \downarrow 2)], \ldots, [f(e \downarrow n)]]'$

Es decir la traspuesta de la matriz cuyas filas son las imágenes de los vectores de la base.

Ejemplo 2.3.3 del libro:

Se sabe que $f(e \downarrow 1) = f(1, 0) = (1, 2, 1)$ y que
$f(e \downarrow 2) = f(0, 1) = (1, 1, 0)$:

BH

Matriz_asociada : = [[1, 2, 1|, [1, 1, 0]]'
=

#19: $\text{Matriz\_asociada} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

#20: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Continuación del ejercicio 2.3.3.
De esta manera también se puede calcular la imagen de un vector mediante la aplicación lineal multiplicando la matriz asociada por ese vector (ver producto de matrices).

BH

Matriz_asociada [$x \downarrow 1, x \downarrow 2$]
=

#21: Matriz_asociada · [x_1, x_2]

#22: $[x_2 + x_1, x_2 + 2 \cdot x_1, x_1]$

El Rango de una aplicación lineal que tiene como matriz asociada *A*, se calcula con el operador "RANK".

Para más información véase en el Capítulo-3, punto 3.5.

2.5. Composición de aplicaciones lineales y productos de matrices

La composición de aplicaciones lineales *"fog"*, tiene como matriz asociada el producto *AB* de las matrices *A* asociada a *f*, y *B* asociada a *g*.

El producto de matrices en DERIVE no tiene asociado ningún símbolo, es decir, bastaría escribir:

BH

AB
=

Véase el ejemplo siguiente:

2.6. Álgebras de endomorfismos y matrices cuadradas

Ejemplo 2.6.2

BH

A := [1, 2; 3, 4]
B := [0, 1; 1, 0]
AB

#23: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

#24: $B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

#25: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

La matriz asociada a $f \circ g$ es AB.

2.7. Matriz asociada a un cambio de base en *V*. Matriz asociada a una aplicación cuando cambian las bases

Ejemplo 2.7.1

Calculada la matriz de cambio de base Q, se calculan las ecuaciones de cambio de base mediante el siguiente procedimiento:

Si (a, b, c, d) son las coordenadas en la base B' y la nueva base es B, entonces

BH

$Q := [1, 0, 1, 0;\ 0, 1, -1, 0;\ 0, 2, 2, 1;\ -1, 0, -1, -1]$
Nueva_base $(a, b, c, d) := Q\ [a; b; c; d]$
=

#26: $Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

#27: Nueva_base $(a, b, c, d) := Q \cdot [a; b; c; d]$

#28: $[a + c,\ b - c,\ 2 \cdot b + 2 \cdot c + d,\ -a - 2 \cdot c - d]$

Calcular las coordenadas de (1; –3; 4; –5) al cambiar la base:

BH

Nueva_base (1; –3; 4; –5)
=

#29: Nueva_base (1; –3; 4; –5)

#30: [5; –7; –3; –4)

2.8. Operaciones elementales en una matriz. Matriz elemental

En esta sección se introducen los operadores en DERIVE correspondientes a cada una de las operaciones elementales, en una matriz A.

1. *Permutación de filas:*

SWAP_ELEMENTS (A, i, j) (Permuta la fila i, por la columna j)

2. *Sustitución de una fila por su suma más una combinación lineal de otras:*

SUBTRACT_ELEMENTS (A, i, j, $-\lambda$) (Sustituye la fila i por ella más λ veces la fila j)

3. *Multiplicación de una fila por un escalar:*

SCALE_ELEMENT (A, i, λ) (Multiplica por λ todos los elementos de la fila 2)

En el ejemplo 2.8.1, hacer la sustitución $F\downarrow 3 -> F\downarrow 3 - 2\,F\downarrow 1$

BH

$A := [1, -2, 1; 0, 1, 3; 2, -2, 1]$
SUBTRACT_ELEMENTS (A, 3, 1, $-(-2)$)
=

#31: $$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

#32: $B :=$ SUBTRACT_ELEMENTS (A, 3, 1, $--2$)

#33: $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

en el mismo ejemplo intercambiar la fila 2 con la fila 3:

BH

$C :=$ SWAP_ELEMENTS (B, 2, 3)
=

#34: $C :=$ SWAP_ELEMENTS (B, 2, 3)

#35:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

en el mismo ejemplo sustituir la fila 2 por 1/2 de la misma fila.

BH

SCALE_ELEMENT (C, 2, 1/2)
=

#36: SCALE_ELEMENT $\left(C, 2, \frac{1}{2}\right)$

#37:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada.

Se usará el operador ROW_REDUCE, que transforma la matriz mediante operaciones elementales en una matriz escalonada.

Las operaciones elementales aparecen también en el Capítulo 3, punto 3.4.

Ejemplo 2.8.2

BH

ROW_REDUCE ([2, –1, 0; 3, 2, 1; 0, 7, 2; –3, 5, 1])
=

#38: ROW_REDUCE
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

#39:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

Escríbase la imagen de $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mediante la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ tal que

$$f\,(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ f\,(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix},\ f\,(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\,(1, 0, 0) + x_2\,(0, 1, 0) + x_3\,(0, 0, 1);\ \text{si } f \text{ es aplicación lineal} \Rightarrow$$

$$f\,(x_1, x_2, x_3) = x_1\,f\,(1, 0, 0) + x_2\,f\,(0, 1, 0) + x_3\,f\,(0, 0, 1) = x_1 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} +$$

$$+ x_3 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 & x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 & 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

En $\mathbb{R}^3$, el vector $\bar{x} = 6\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3$ tiene por componentes (2, 3, 4) respecto a la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Sabiendo que $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{v}_2 = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, calcúlese $\bar{v}_3$ en función de la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Solución:

$$6\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3 = 2\,(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + 3\,(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) + 4\,(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3) \Rightarrow$$

$$6 = 2 + 4x;\ 5 = 5 + 4y;\ 7 = 3 + 4z \Rightarrow x = 1;\ y = 0;\ z = 1$$

También se podía haber hecho utilizando la fórmula del cambio de base:

$$X_U = U'_U\ X_{U'} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3

Determínese una base del núcleo de la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3 - x_4)$.

Solución:

El núcleo estará formado por los pares que cumplan: $(x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3 - x_4) = (0, 0)$
Es un sistema de 2 ecuaciones independientes y dos parámetros $\Rightarrow x_1 = -x_3 + x_4$; $x_2 = 2x_3 - x_4$
Es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2; una base puede ser $\{(-1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$.

Ejercicio 4

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. De las siguientes opciones elíjanse las correctas, si existen: *a)* El núcleo es $\{(0, 0, 0)\}$. *b)* El núcleo es el eje z. *c)* El núcleo es el plano que contiene los ejes x, y.

Solución:

El núcleo es el eje z: $f(0, 0, c) = (0, 0, 0)$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $B' = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. Se pide: *a)* Obtener las coordenadas de los vectores B' respecto a B y explicar qué significa cambiar un vector de base. *b)* Escribir las ecuaciones que permiten pasar de las coordenadas de un vector (x', y', z') respecto a B' a las coordenadas (x, y, z) del mismo vector a B. *c)* Calcular las coordenadas respecto a B', del vector que respecto a B es $(2, 3/2, 1/4)$.

Solución:

a)

$$(1, 1, 2) = x_1' (1, 0, 1) + y_1' (0, 1, 1) + z_1' (0, 0, 2) \Rightarrow x_1' = 1,\ y_1' = 1,\ z_1' = 0$$
$$(1, 0, 1) = x_2' (1, 0, 1) + y_2' (0, 1, 1) + z_2' (0, 0, 2) \Rightarrow x_2' = 1,\ y_2' = 0,\ z_2' = 0$$
$$(0, 1, 2) = x_3' (1, 0, 1) + y_3' (0, 1, 1) + z_3' (0, 0, 2) \Rightarrow x_3' = 0,\ y_3' = 1,\ z_3' = 1/2$$

b) Ecuaciones del cambio de base

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Se define una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tal que, $f(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1$; $f(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$; $f(2\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3$. Determínese *a)* Las coordenadas de $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_3)$ respecto a la base de $\mathbb{R}^4$, $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$, sabiendo que $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. *b)* Ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio *Imagen de f*. *c)* Determínese el subespacio *núcleo* de *f*.

Solución:

a) y *b)*

$f(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) = f(\bar{e}_1) - f(\bar{e}_3) = \bar{u}_1$; $f(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = f(\bar{e}_2) - f(\bar{e}_3) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$; $f(2\bar{e}_3) =$
$= 2\, f(\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_3 \Rightarrow f(\bar{e}_1) = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_3 = (2, 0, 1, 0)$; $f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 =$
$= (2, -1, 1, 0)$; $f(\bar{e}_3) = \bar{u}_1 + \bar{u}_3 = (1, 0, 1, 0)$

$$\text{Im}\,(f) = \left\{ (y_1, y_2, y_3, y_4), \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\},$$

para que el sistema generado tenga solución,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{pmatrix} \Rightarrow y_4 = 0.$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} y_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ y_2 = -\lambda_2 \\ y_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

es un sistema lineal homogéneo cuya única solución es (0, 0, 0) porque rg (A) = rg $(A \mid b) = 3$.

Ejercicio 7

Se define la aplicación $f: P_2 \to P_2$, tal que, $f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2)$. *a)* Defínase aplicación lineal y demuéstrese que f lo es. *b)* Explíquese qué es la matriz de una aplicación lineal y determínese la de esta aplicación al tomar $B = \{1, x, x^2\}$ como base de P_2. *c)* Explíquese qué es núcleo de una aplicación lineal y determínese el de esta aplicación. (P_2 es el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 2).

Solución:

La respuesta a las cuestiones teóricas se puede repasar en el capítulo correspondiente.

a) $f(\alpha(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta(a_2 + b_2x + c_2x^2)) = (\alpha a_1 + \alpha c_1) + 2\alpha b_1x + (\alpha a_1 + \alpha c_1)x^2 +$
$+ (\beta a_2 + \beta c_2) + 2\beta b_2x + (\beta a_2 + \beta c_2)x^2 = \alpha f(a_1 + b_1x + c_1x^2) + \beta f(a_2 + b_2x + c_2x^2)$

b) $\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + x^2 \\ f(x) = 2x \\ f(x^2) = 1 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz de la aplicación.

c) Nuc $f(x) = \{a + bx + cx^2 \mid (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2) = 0\} \Rightarrow b = 0,\ a + c = 0$

Ejercicio 8

Dado el espacio vectorial de funciones $F = \{f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x\}$. Escríbase la matriz asociada a la base {sen x, cos x} del endomorfismo de F definido por el cálculo de la derivada primera.

Solución:

$$\begin{cases}(0, 1) = 0 \operatorname{sen} x + 1 \cos x\\(1, 0) = 1 \operatorname{sen} x + 0 \cos x\end{cases}$$

forman la base; mediante la derivación se calculan las imágenes:

$$\begin{cases}(0,1) = 0 \text{ sen } x + 1 \cos x \to (-1,0) = -1 \text{ sen } x + 0 \cos x \\ (1,0) = 1 \text{ sen } x + 0 \cos x \to (0,1) = 0 \text{ sen } x + 1 \cos x\end{cases}$$

La matriz pedida es: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9

$f(x)$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal tal que $f(1,0,0,0) = (1,-1,2)$; $f(0,1,0,0) = (2,1,1)$; $f(0,0,1,0) = (4,-1,5)$; $f(0,0,0,1) = (-1,-5,4)$. Determínese una base del núcleo y una base de la imagen.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$

Unas ecuaciones paramétricas del núcleo son: $x_1 = -2a - 3b$; $x_2 = -a + 2b$; $x_3 = a$; $x_4 = b$
Una base del núcleo: $\{(-2,-1,1,0), (-3,2,0,1)\}$

$$\text{Im}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

De estos 4 vectores, hay dos que forman base, si tomamos el 1.° y el 2.°, que son l.i., obtenemos las ecuaciones paramétricas de la imagen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

eliminando los parámetros se obtienen las ecuaciones cartesianas $y_3 = y_1 - y_2$. Una base de la imagen puede ser $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$, y otra $\{(1,-1,2), (2,1,1)\}$.

Ejercicio 10

Escríbase una base del núcleo de la aplicación lineal f:

$$f : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2 \mid f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, 0)$$

Solución:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0, 0) \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow a = -d, \forall\ c, b \in \mathbb{R}; \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base del núcleo.

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

Se simplifica el sistema que resulta:

BH

x [3, 1; 2, 4] + y [1, −1; −5, 5] + z [2, −2; −1, 4]
=

#1:
$$x \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

#2:
$$\begin{bmatrix} 3 \cdot x + y + 2 \cdot z & x - y - 2 \cdot z \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y - z & 4 \cdot x + 5 \cdot y + 4 \cdot z \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2

Método 1:
Cambiando los nombres $e \downarrow 1 \to a$, $e \downarrow 2 \to b$, $e \downarrow 3 \to c$ se calculan las coordenadas:

BH

$6a+5b+7c=2\,(a+b)+3\,(b+c)+4\,(xa+yb+zc)$
=
Simplificar > Factorizar (Variable, a, b, c) > Factorizar
Resolver > Expresión (Variable, a, b, c, Algebraico, Real)
> Resolver
Nota: Se podía haber resuelto directamente.

#3: $6\cdot a+5\cdot b+7\cdot c=2\cdot(a+b)+3\cdot(b+c)+4\cdot(x\cdot a+y\cdot b+z\cdot c)$

#4: $6\cdot a+5\cdot b+7\cdot c=4\cdot a\cdot x+4\cdot b\cdot y+4\cdot c\cdot z+2\cdot a+5\cdot b+3\cdot c$

#5: SOLVE $(6\cdot a+5\cdot b+7\cdot c=2\cdot a\cdot(2\cdot x+1)+b\cdot(4\cdot y+5)+c\cdot(4\cdot z+3),$ $[a, b, c]$, Real)

#6: $a\cdot(x-1)+b\cdot y+c\cdot(z-1)=0$

Método 2: Con la fórmula de cambio de base:

BH

$[6; 5; 7]=[1, 0, x; 1, 1, y; 0, 1, z]\,[2; 3; 4]$
=
Resolver > Expresión (Variables, x, y, z, Algebraico, Real) > Sí
=

#7: $$\begin{bmatrix}6\\5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&x\\1&1&y\\0&1&z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

#8: $$\begin{bmatrix}6=4\cdot x+2\\5=4\cdot y+5\\7=4\cdot z+3\end{bmatrix}$$

#9: SOLVE $\left(\begin{bmatrix}6=4\cdot x+2\\5=4\cdot y+5\\7=4\cdot z+3\end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$

#10: $[x=1\wedge y=0\wedge z=1]$

Ejercicio 3

Se renombran las variables $x\downarrow 1\to a, x\downarrow 2\to b, x\downarrow 3\to c, x\downarrow 4\to d$:
El problema es equivalente a resolver el sistema.

BH

Resolver > Sistema (2 ecuaciones) > Sí
$a+b-c=0$
$a+c-d=0$
Variables, a, b > Resolver

#11: SOLVE ($[a+b-c=0, a+c-d=0]$, $[a, b]$)

#12: $[a=d-c \wedge b=2\cdot c-d]$

Ejercicio 4

Se calcula el núcleo; como la condición es $f(x, y, z) = (x, y, 0)$ se obtiene:

BH

$[x, y, 0] = [0, 0, 0]$
=
Resolver > Expresión (Variables, x, y, Algebraico, Real)
> Resolver

#13: $[x, y, 0] = [0, 0, 0]$

#14: SOLVE ($[x, y, 0] = [0, 0, 0]$, $[x, y]$, Real)

#15: $[x = 0 \wedge y = 0]$

luego no depende del valor de z; la solución son los puntos de la forma: $(0, 0, z)$.

Ejercicio 5

Caso *a)*
Se resuelve cada ecuación independientemente, la primera es:

BH

$[1, 1, 2] = x\,[1, 0, 1] + y\,[0, 1, 1] + z\,[0, 0, 2]$
Resolver > Expresión > (Variables, x, y, z, Algebraico, Real) >Resolver

#16: $[1, 1, 2] = x\cdot[1, 0, 1] + y\cdot[0, 1, 1] + z\cdot[0, 0, 2]$

#17: SOLVE $[1, 1, 2] = x\cdot[1, 0, 1] + y\cdot[0, 1, 1] + z\cdot[0, 0, 2]$, $[x, y, z]$, Real).

#18: $[x = 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0]$

La ecuación obtenida con el vector (1, 0, 1) es:

#19: $[1, 0, 1] = x \cdot [1, 0, 1] + y \cdot [0, 1, 1] + z \cdot [0, 0, 2]$

#20: SOLV E ($[1, 0, 1] = x \cdot [1, 0, 1] + y \cdot [0, 1, 1] + z \cdot [0, 0, 2]$, $[x, y, z]$, Real)

#21: $[x = 1 \wedge y = 0 \wedge z = 0]$

Y por último (0, 1, 2):

#22: $[0, 1, 2] = x \cdot [1, 0, 1] + y \cdot [0, 1, 1] + z \cdot [0, 0, 2]$

#23: SOLVE ($[0, 1, 2] = x \cdot [1, 0, 1] + y \cdot [0, 1, 1] + z \cdot [0, 0, 2]$, $[x, y, z]$, Real)

#24: $\left[x = 0 \wedge y = 1 \wedge z = \frac{1}{2}\right]$

Caso *b)* Ecuaciones del cambio de base:

BH

$[x; y; z] = [1, 1, 0; 1, 0, 1; 0, 0, 1/2]\ [a; b; c]$

#25: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Se pueden calcular las coordenadas de un vector en la nueva base definiendo la expresión anterior como función (véase teoría-DERIVE).

c) Las coordenadas (*a, b, c*) del vector (2, 3/2, 1/4) son:

BH

$[2; 3/2; 1/4] = [1, 1, 0; 1, 0, 1; 0, 0, 1/2]\ [a; b; c]$
Resolver > Expresión (variables a, b, c, Algebraico, Real)

#26: $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

#27:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, [a, b, c], \text{Real}\right)$$

#28:

$$\left[a = 1 \wedge b = 1 \wedge c = \frac{1}{2}\right]$$

Ejercicio 6

Caso *b)* La Imagen de *f* son los vectores de la forma:

BH

[2, 2, 1; 0, –1, 0; 1, 1, 1; 0, 0, 0] [*x; y; z*]
=

#29:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

#30:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x + 2 \cdot y + z \\ -y \\ x + y + z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Caso *c)* El núcleo de *f* son los vectores (*x, y, z*) tales que:

BH

[0; 0; 0; 0] = [2, 2, 1; 0, –1, 0; 1, 1, 1; 0, 0, 0] [*x; y; z*]
Resolver > Expresión
Variables, x, y, z, Real, Algebraica > Resolver

#31:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

#32:

$$\begin{bmatrix} 0 = 2 \cdot x + 2 \cdot y + z \\ 0 = -y \\ 0 = x + y + z \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$$

#33: SOLVE $\left(\begin{bmatrix} 0 = 2 \cdot x + 2 \cdot y + z \\ 0 = -y \\ 0 = x + y + z \\ 0 = 0 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$

#34:

$$[x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0]$$

Ejercicio 7

Se define el dominio de las variables *a, b, c*:

BH

Definir > Dominio de Variable (nombre a, Real, Todos) > Sí
Definir > Dominio de Variable (nombre b, Real, Todos) > Sí
Definir > Dominio de Variable (nombre c, Real, Todos) > Sí

Se define también la aplicación lineal como una función:

BH

$f(a, b, c) := (a + bx + cx\text{^}2) + (c + bx + ax\text{^}2)$

#35: $a : \in \text{Real}$

#36: $b : \in \text{Real}$

#37: $c : \in \text{Real}$

#38: $f(a, b, c) := (a + b \cdot x + c \cdot x^2) + (c + b \cdot x + a \cdot x^2)$

Y teniendo en cuenta que la base es $\{1, x, x^2\}$, se trata de calcular:

BH

$f(1, 0, 0)$
=

$f(0, 1, 0)$
=
$f(0, 0, 1)$
=

#39: $f(1, 0, 0)$

#40: $x^2 + 1$

#41: $f(0, 1, 0)$

#42: $2 \cdot x$

#43: $f(0, 0, 1)$

#44: $x^2 + 1$

Apartado *c)*
Se calcula el núcleo:

BH

$f(a, b, c) = 0$
=

#45: $f(a, b, c) = 0$

#46: $x^2 \cdot (a + c) + 2 \cdot b \cdot x + a + c = 0$

Ejercicio 8

Definimos la base de vectores, *a, b*:

BH

$a := 0 \text{ SIN } (x) + 1 \text{ COS } (x)$
$b := 1 \text{ SIN } (x) + 0 \text{ COS } (x)$

#47: $a := 0 \cdot \text{SIN } (x) + 1 \cdot \text{COS } (x)$

#48: $b := 1 \cdot \text{SIN } (x) + 0 \cdot \text{COS } (x)$

Se calculan las derivadas respectivas:

BH

DIF (a, x)
=

DIF (b, x)
=

#49: $\frac{d}{dx}\, a$

#50: $-\text{SIN}(x)$

#51: $\frac{d}{dx}\, b$

#52: $\text{COS}(x)$

Ejercicio 9

Se escribe la matriz formada por los vectores imagen:

BH

$A := [1, 2, 4, -1; -1, 1, -1, -5; 2, 1, 5, 4]$
$A\,[x, y, z, t]' = [0; 0; 0]$
=

#53: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

#54: $A \cdot [x, y, z, t]' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

#55: $\begin{bmatrix} x + 2 \cdot y + 4 \cdot z - t = 0 \\ -x + y - z - 5 \cdot t = 0 \\ 2 \cdot x + y + 5 \cdot z + 4 \cdot t = 0 \end{bmatrix}$

Se resuelve:

#56: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} x + 2 \cdot y + 4 \cdot z - t = 0 \\ -x + y - z - 5 \cdot t = 0 \\ 2 \cdot x + y + 5 \cdot z + 4 \cdot t = 0 \end{bmatrix}, [z, x, y, t], \text{Real}\right)$

#57: $[z + y - 2 \cdot t = 0 \wedge x - 2 \cdot y + 7 \cdot t = 0]$

Se escriben las ecuaciones paramétricas:

BH

Simplificar > *Sustituir variable* ($z = \lambda$, $t = \mu$) > *Sí*

#58: $[\lambda + y - 2 \cdot \mu = 0 \wedge x - 2 \cdot y + 7 \cdot \mu = 0]$

Se calcula el rango de A para saber la dimensión del núcleo:

BH

RANK (A)
=

#59: RANK (A)

#60: 2

Se comprueba si los vectores (–2, –1, 1, 0) y (–3, 2, 0, 1) linealmente independientes están en el núcleo:

BH

A [–2, –1, 1, 0]'
=
A [–3, 2, 0, 1]'
=

#61: $A \cdot$ [–2, –1, 1, 0]'

#62: [0, 0, 0]

#63: $A \cdot$ [–3, 2, 0, 1]'

#64: [0, 0, 0]

Ejercicio 10

Se impone la condición de núcleo y se resuelve la expresión que resulta:

BH

$f[a, b; c, d] = [a + d, 0] = [0, 0]$
Resolver > *Expresión*
(variables (a, b, c, d), Algebraico, Real) > *Resolver*

#65: $$f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a+d, 0] = [0, 0]$$

#66: $$\text{SOLVE}\left(f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a+d, 0] = [0, 0], [a, b, c, d], \text{Real}\right)$$

#67: $$[a + d = 0]$$

BH

Resolver > *Expresión*
(variables (a), Algebraico, Real) > *Resolver*

#68: SOLVE $([a + d = 0], a,$ Real)

#69: $$[a = -d]$$

CAPÍTULO 3

DETERMINANTES

3.1. Determinante de una matriz cuadrada

Para calcular el determinante de una matriz cuadrada *M* se usa el operador DET:
De forma genérica ***[3.1.2]***:

BH

DET ([$a\downarrow 11, a\downarrow 12, a\downarrow 13; a\downarrow 21, a\downarrow 22, a\downarrow 23; a\downarrow 31, a\downarrow 32, a\downarrow 33$])
=
Simplificar > Expandir (Variable a, Racional)
> Expandir

#1: $\mathrm{DET}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

#2: $a_{33}\cdot(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})+a_{32}\cdot(a_{13}\cdot a_{21}-a_{11}\cdot a_{23})+a_{31}\cdot(a_{12}\cdot a_{23}-a_{13}\cdot a_{22})$

#3: $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-$
$-\ a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$

3.1.3. Consecuencias (se supone que M es de orden 3)

1.

BH

DET ([$a\downarrow 11, a\downarrow 12, a\downarrow 13; 0, a\downarrow 22, a\downarrow 23; 0, 0, a\downarrow 33$])
=

#4: $\text{DET}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

#5: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

3. La matriz unidad de orden n es IDENTITY_MATRIX (n):

BH

DET (IDENTITY_MATRIX (3))
=

#6: DET (IDENTITY_MATRIX (3))

#7: 1

3.2. Cálculo de determinantes

Las herramientas que nos proporciona DERIVE para el cálculo de: Submatrices, Menor de una matriz, Adjunto o cofactor de un elemento son:

DET (*A*)	(Calcula el determinante de una matriz cuadrada *A*)
MINOR (*A, i, j*)	(Borra la fila *i*, y la columna *j* de *A*)
COFACTOR (*A, i, j*)	(Calcula el adjunto del elemento *ij* de la matriz *A*)
ELEMENT (*A, i, j*))	(Extrae el elemento *ij* de la matriz *A*)

Para Adjunto de una matriz, se dispone del operador:

ADJOINT ( )'

ya que ADJOINT, calcula la traspuesta de lo que se define en el libro como adjunta de una matriz. Debemos calcular después, la traspuesta del resultado obtenido. Es decir el resultado es ADJOINT ( )'.

(Obviamente en todos los casos hay que simplificar, =)

Ejemplos del libro:

Ejemplo 3.2.1

BH

$A := [2, -1, 3, 3; 1, -1, 0, 1; 1, 2, 4, 2; 1, 1, 1, 0]$
$A \downarrow 12 :=$ COFACTOR (A, 1, 2)
=

#8: $A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

#9: $A_{12} :=$ COFACTOR $(A, 1, 2)$

#10: 5

3.3. Propiedades de los determinantes

Se comprueban las distintas propiedades particularizando al caso de la matriz del ejemplo 3.3.1:

BH

$A := [0, 2, 1; -1, 0, 1; 3, 2, 0]$

#11: $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

1. $\det A = \det A^t$.

BH

IDENTICAL? (DET (A), DET (A'))
=

#12: IDENTICAL? (DET (A), DET (A'))

#13: true

2. Si se permutan las filas 1 y 3, el determinante cambia de signo.

BH

B : = SWAP_ELEMENTS $(A, 1, 3)$
=

#14: B : = SWAP_ELEMENTS $(A, 1, 3)$

#15:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

BH

DET (B)
=
DET (A)
=

#16: DET (B)

#17: –4

#18: DET (A)

#19: 4

3. Si hay dos filas iguales el determinante es 0.

BH

DET ([1, 2, 1; 1, 2, 1; a, b, c])
=

#20:

$$\text{DET}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

#21: 0

4. Si se multiplican por λ todos los elementos de la fila 2 de A, el det $A = \lambda$ det A.

BH

C : = SCALE_ELEMENT (A, 2, λ)
=

#22: C : = SCALE_ELEMENT (A, 2, λ)

#23:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -\lambda & 0 & \lambda \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

BH

DET (*C*)
=

#24: DET (*C*)

#25: $4 \cdot \lambda$

5. Si en la matriz *A* se sustituye la fila 2 por ella más λ veces la fila 3, det *A* no varía.

BH

D : = SUBTRACT_ELEMENTS (*A*, 2, 3, $-\lambda$)
=

(Obsérvese que SUBTRACT_ELEMENTS (*A*, 2, 3, λ) sustituye la fila 2 por ella menos λ veces la tercera fila) y se calcula de nuevo el determinante de la matriz que resulta:

BH

DET (*D*)
=

#26: *D* : = SUBTRACT_ELEMENTS (*A*, 2, 3, $-\lambda$)

#27:
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 \cdot \lambda - 1 & 2 \cdot \lambda & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

#28: DET (*D*)

#29: 4

6. Usando la matriz *D*, a la fila 2 se resta la fila 1, el determinante no varía.

BH

E : = SUBTRACT_ELEMENTS (*D*, 2, 1, 1)
=

#30: *E* : = SUBTRACT_ELEMENTS (*D*, 2, 1, 1)

#31:
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 \cdot \lambda - 1 & 2 \cdot \lambda - 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

BH

IDENTICAL? (DET (*A*), DET (*E*))
=

#32: IDENTICAL? (DET (*A*), DET (*E*))

#33: true

7. Se define una matriz nueva de orden 3, det (*AB*) = det *A* · det *B*.

BH

B : = [1, 2, 2; 3, 3, 1; 5, 6, 7]
IDENTICAL? (DET (*AB*), DET (*A*) DET (*B*))
=

#34: $B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

#35: IDENTICAL? (DET (*A* · *B*), DET (*A*) · DET (*B*))

#36: true

Observación:

Los pasos anteriores son una comprobación no una demostración.

3.4. Cálculo de la matriz inversa

Para calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada *A*, la notación es A^{-1}.

* Usando la definición:
En el ejemplo 3.4.2.

BH

A : = [1, 2; 0, 3]
A^–1
=

#37: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

#38: A^{-1}

#39:
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

* Utilizando operaciones elementales:
En el ejemplo 3.4.3.

BH

$A := [1, 0, 2; 2, -1, 3; 1, 1, 1]$
A_I := APPEND_COLUMNS (A, IDENTITY_MATRIX (3))
=

#40:
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#41: A_I := APPEND_COLUMNS (A, IDENTITY_MATRIX (3))

#42:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se aplica el método de reducción por filas:

BH

ROW_REDUCE (A_I)
=

#43: ROW_REDUCE (A_I)

#44:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A sería la que resulta a la derecha de la matriz identidad.

* Utilizando determinantes:

En el ejemplo 3.4.4
Adjunta de A.

BH

$A := [1, 2, 1; -2, 0, 3; 1, 1, 3]$
ADJOINT (A)'
=

#45: $$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

#46: ADJOINT (A)'

#47: $$\begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 3.4.5.
Inversa de A.

BH

Inv_A : = 1 / DET (A) ADJOINT (A)
=

#48: $$\text{Inv\_A} := \frac{1}{\text{DET}(A)} \cdot \text{ADJOINT}(A)$$

#49: $$\begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

Se comprueba que efectivamente, es la matriz inversa:

BH

AInv_A
=

#50: $A \cdot \text{Inv\_A}$

#51:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5. Rango de una matriz; Rango de un endomorfismo; Rango de un sistema de vectores

Para saber si un sistema S de n vectores de un espacio vectorial de dimensión n es libre basta ver si el determinante de la matriz que forman sus vectores es no nulo:

Ejemplo 3.5.1

BH

DET ([1, –1, 3; 2, 1, 1; 1, 0, 0])
=

#52: $\text{DET} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

#53: –4

Para calcular el rango de una matriz A (es decir, el número de vectores linealmente independientes de A) se usará el operador RANK.

Ejemplo 3.5.2

BH

RANK ([5, –1, 3, –2, 4; 17, –2, 5, 1, 7; 19, –1, 1, 8, 2])
=

#54: RANK $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 17 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 19 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

#55: 2

Observaciones:

— El procedimiento que sigue DERIVE para el cálculo del rango es calcular la matriz escalonada y devolver el número de filas distintas de 0.

— Cuando se tiene como elemento de la matriz un parámetro cualquiera, DERIVE no sabe distinguir sus posibles valores.

Para calcular el rango de una matriz *A*, se puede usar el operador ROW [*i*, ..., *j*] que sirve para devolver la matriz formada por las filas de *A* que van desde la *i*-ésima a la *j*-ésima.

Ejemplo

BH

A ROW [2, 3]
=

#56: *A* ROW [2, 3]

#57: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Para extraer columnas sería COL.

Ejemplo

BH

A COL [2, 3]
=

#58: *A* COL [2, 3]

#59: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

Siendo A, B matrices cuadradas del mismo orden, de entre las siguientes opciones, elíjanse las correctas, si existen. *a)* $|A+B|=|A|+|B|$. *b)* $|AB|=|A||B|$. *c)* $|A^2|=|A|^2$.

Solución:

a) es falsa; *b)* *cierta* y *c)* también *cierta* porque es consecuencia de la respuesta *b)*.

Ejercicio 2

Resuélvase la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1.$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^2-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = -(x-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-1)\begin{vmatrix} 1 & x-1 & x-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (x-1)\left[6(x-1)-2(x-2)\right] =$$

$$= (x-1)(4x-2) = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 4x-2=x-1 \Rightarrow x=1/3 \end{cases}$$

Ejercicio 3

De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen: *a)* Si la matriz AB tiene inversa, necesariamente A y B tienen inversa. *b)* $AB=BA$ siendo A y B matrices cuadradas reales del mismo orden. *c)* $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Solución:

a) Falsa, si $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{m\times n}$, $\Rightarrow AB \in M_{m\times n}$ y puede tener inversa, pero si $m \neq n$, A y B no pueden tener inversa.

b) Falsa, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

c) *Cierta,* $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$.

Ejercicio 4

Redúzcase $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix}$

a producto de factores reales irreducibles en $\mathbb{R}$.

Solución:

$$(x^2+x+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & x+x^2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & x+x^2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & x+x^2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & x+x^2 \end{vmatrix} = (x^2+x+5) = (x^2+x+5)(x^2+x)^4 =$$

$$= x^4(x+1)^4(x^2+x+5).$$

Ejercicio 5

Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen: *a)* $AB = I$. *b)* B es la inversa A. *c)* A no tiene inversa.

Solución:

a) y c) ciertas, b) falsa. Para que una matriz A tenga inversa, hace falta que sea cuadrada y que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Ejercicio 6

¿Para qué valores de x, la inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta?

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -x^2 + 10 = 1 \Rightarrow x = \pm 3$$

Ejercicio 7

Sea $|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix}$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

c) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

Ejercicio 8

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, determínese el valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = 4.\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.1 = 1.$$

Ejercicio 9

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, se cumple que:

a) Si existe $A^{-1} \Rightarrow (A+B)\,A^{-1} = A^{-1}\,(A+B)$.
b) Si existe $A^{-1} \Rightarrow (A+B)\,A^{-1}\,(A-B) = (A-B)\,A^{-1}\,(A+B)$.
c) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

Solución:

a) Falsa. $(A+B)\,A^{-1} = I + BA^{-1} \neq A^{-1}\,(A+B) = I + A^{-1}B$ (el producto de matrices no es conmutativo).

b) *Cierta.*

$$(A+B)\,A^{-1}\,(A-B) = (A+B)\,(I - A^{-1}B) = A - B + B - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B = (A-B)\,A^{-1}\,(A+B)$$

c) Falsa. Basta considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para tener un contraejemplo en los apartados *a* y *c*.

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

Bastará encontrar un contraejemplo para *a)* (ya que las otras dos opciones son propiedades de los determinantes):

Se definen dos matrices cuadradas de orden dos.

BH

$A := [2, 1; 3, 4]$
$B := [1, 1; 3, 2]$

y se comprueba si se cumple *a)*

BH

IDENTICAL? (DET $(A + B)$, DET (A) + DET (B))
=

#1: $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

#2: $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

#3: IDENTICAL? (DET $(A + B)$, DET (A) + DET (B))

#4: false

También se podía haber calculado cada término:

BH

DET $(A + B)$
=
DET (A) + DET (B)
=

#5: DET $(A + B)$

#6: 6

#7: DET (*A*) + DET (*B*)

#8: 4

Ejercicio 2

Se calcula el determinante y posteriormente se resuelve la ecuación:

BH

DET ([1, *x*, *x*^2, *x*^3; 1, 1, 1, 1; 1, 2, 3, 4; 1, 4, 9, 16])
=
Simplificar > *Factorizar (variable x, Racional)* > *Factorizar*

#9: $\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

#10: $4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 2$

#11: $2 \cdot (x-1) \cdot (2 \cdot x - 1)$

Se resuelve la ecuación que resulta:

BH

2 (*x* – 1) (2 *x* – 1) = *x*^2 – 2 *x* + 1
Resolver > *Expresión (variable x, Algebraico, Real)*
>*Resolver*

#12: $2 \cdot (x-1) \cdot (2 \cdot x - 1) = x^2 - 2 \cdot x + 1$

#13: SOLVE $(2 \cdot (x-1) \cdot (2 \cdot x - 1) = x^2 - 2 \cdot x + 1, x, \text{Real})$

#14: $x = \frac{1}{3} \vee x = 1$

Ejercicio 3

Se comprueba que *b)* es falsa:

BH

IDENTICAL? ([1, 2; 3, 4] [3, 5; 0, 1], [3, 5; 0, 1] [1, 2; 3, 4])
=

#15: IDENTICAL? $\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\right)$

#16: false

Ejercicio 4

Se calcula el determinante y si es necesario, se factoriza.
Para simplificar notación, previamente se escribe el determinante:

BH

DET ([*a*, 1, 1, 1, 1; 1, *a*, 1, 1, 1; 1, 1, *a*, 1, 1; 1, 1, 1, a, 1; 1, 1, 1, 1, *a*])

Sustituye "*a*" por "1 + *x* + *x*^2":

BH

Simplificar > *Sustituir variable*
Variable a, Nueva variable 1 + *x* + *x*^2 > *Sí*

#17: $\text{DET}\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & a\end{bmatrix}$

#18: $\text{DET}\begin{bmatrix}1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2\end{bmatrix}$

Se calcula el determinante:

BH

=

#19: $x^4\cdot(x^6+5\cdot x^5+15\cdot x^4+30\cdot x^3+35\cdot x^2+21\cdot x+5)$

Se factoriza el determinante:

BH

Simplificar > Factorizar
variable x, Forma Racional > Factorizar

#20: $x^4 \cdot (x+1)^4 \cdot (x^2+x+5)$

Ejercicio 5

Se definen las matrices A y B. A continuación, se multiplica:

BH

$A := [2, 0, 1; 1, 2, 1]$
$B := [1, 1; 0, 1; -1, -2]$
AB
=

#21: $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

#22: $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

#23: $A \cdot B$

#24: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se calcula A^{-1}

BH

$A^{\wedge} - 1$
=

#25: A^{-1}

#26: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Por tanto, no se puede calcular la inversa de A.

Ejercicio 6

Se imponen las condiciones del enunciado a la matriz dada:

BH

$[x, -2; 5, -x]$^ $- 1 = - [x, -2; 5, -x]$

#27: $$\begin{bmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

Se resuelve la expresión que resulta en x:

BH

Resolver > Expresión (variable, x, Algebraico, Real)
> Resolver

#28: $$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{bmatrix}, x, \text{Real}\right)$$

#29: $$[x = -3, x = 3]$$

Ejercicio 7

Utilizando el comando IDENTICAL? se comprueba cada respuesta:

BH

Deter : = DET ([1 + a, 1; 1, 1 + b])
IDENTICAL? (Deter, DET ([1, 1; 1, 1]) + DET ([a, 0; 0, b]))
=
IDENTICAL? (Deter, DET ([1, 0; 1, b]) + DET ([a, 0; 0, b]) + DET ([1, 1; 1, 1])
+ DET ([a, 1; 0, 1]))
=
IDENTICAL? (Deter, DET ([1, 0; 1, 0]) + DET ([a, 0; 0, b]) + DET ([0, 1; 0, 1]))
=

#30: $$\text{Deter} := \text{DET}\begin{bmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{bmatrix}$$

#31: $$\text{IDENTICAL?}\left(\text{Deter}, \text{DET}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \text{DET}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right)$$

#32: false

#33: $\text{IDENTICAL?}\left(\text{Deter, DET}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} + \text{DET}\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} + \text{DET}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + \text{DET}\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$

#34: true

#35: $\text{IDENTICAL?}\left(\text{Deter, DET}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \text{DET}\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} + \text{DET}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$

#36: false

Ejercicio 8

Mediante las transformaciones oportunas del determinante dado, se calculará el valor del segundo.

Una de las propiedades aplicadas es que al multiplicar una fila o columna por un escalar, el determinante queda multiplicado por dicho escalar.

Al multiplicar la columna 2 de la matriz por 4, su determinante queda multiplicado por 4; para que no varíe su valor hay que multiplicar también por 1/4, ya que $(1/4) \cdot 4 = 1$.

Se trabajará con matrices. Se multiplica por 1/4 la segunda fila.

BH

M : = SCALE_ELEMENT ([*x, y, z;* 1, 0, 2; 1, 1, 3], 2, 1/4)
=

#37: $\text{M : = SCALE\_ELEMENT}\left(\begin{bmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}, 2, \frac{1}{4}\right)$

#38: $\begin{bmatrix}x & y & z\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

Ahora se multiplica por 4 la tercera fila:

BH

SCALE_ELEMENT (M, 3, 4)
=

#39: SCALE_ELEMENT (M, 3, 4)

#40:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Se calcula la traspuesta:

BH

$(F3)'$
=

#41:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix},$$

#42:

$$\begin{bmatrix} x & \frac{1}{4} & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & \frac{1}{2} & 12 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9

Se definen las matrices:

BH

Editar > *Expresión*
$A := [[2, 3], [1, 1]]$
$B := [[1, 3], [1, 1]]$

#43:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#44:

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula la inversa de A:

BH

$A\text{^}-1$
Simplificar > Normal

#45: A^{-1}

#46:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Se calcula el producto de matrices de cada término y se comprueba que *a)* es falsa:

BH

$(A+B)\,A\text{^}-1$
Simplificar > Normal
$A\text{^}-1\,(A+B)$
Simplificar > Normal

#47: $(A+B)\cdot A^{-1}$

#48:
$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

#49: $A^{-1}\cdot(A+B)$

#50:
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La opción *c)* se comprueba análogamente.

BH

$(A-B)\text{^}2$
=
$A\text{^}2-2AB+B\text{^}2$
=

#51: $(A-B)^2$

#52:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#53: $A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$

#54:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Sistemas de ecuaciones lineales

4.1.1. Definición de un sistema de ecuaciones lineales

Método 1

Escribir las ecuaciones en la línea de edición, una a una separadas por el operador lógico, ∧ o AND.

Ejemplo

BH

$$2x + 5y = 0 \wedge 4x - 3y = 2$$

O bien

BH

$$3x + 4y = 9 \text{ AND } 2x + y = 2$$

#1: $2 \cdot x + 5 \cdot y = 0 \wedge 4 \cdot x - 3 \cdot y = 2$

#2: $3 \cdot x + 4 \cdot y = 9 \wedge 2 \cdot x + y = 2$

Resolución del sistema

Iluminar el sistema de ecuaciones, y a continuación con la BH, se selecciona Resolver > Expresión.

BH

Resolver > Expresión (Variables, x, y, Algebraico, Real) > Resolver

#3: SOLVE $(2 \cdot x + 5 \cdot y = 0 \wedge 4 \cdot x - 3 \cdot y = 2, [x, y], \text{Real})$

#4: $$x = \frac{5}{13} \wedge y = -\frac{2}{13}$$

#5: SOLVE $(3 \cdot x + 4 \cdot y = 9 \wedge 2 \cdot x + y = 2, [x, y], \text{Real})$

#6: $$x = -\frac{1}{5} \wedge y = \frac{12}{5}$$

Método 2

Escribir las ecuaciones como coordenadas de un vector:

BH

$[2x + 5y = 0, 2x + 2y = 4]$

#7: $[2 \cdot x + 5 \cdot y = 0, 2 \cdot x + 2 \cdot y = 4]$

El *sistema se resuleve* igual que el el caso anterior.

#8: SOLVE $([2 \cdot x + 5 \cdot y = 0, 2 \cdot x + 2 \cdot y = 4], [x, y], \text{Real})$

#9: $$\left[x = \frac{10}{3} \wedge y = -\frac{4}{3}\right]$$

Método 3

Introducir las ecuaciones con la BH.

BH

Resolver > Sistema (número de ecuaciones, 2) > Sí
Editar una a una en la ventana

BH

$2x + 4y = 0 \quad 3x + 3y = 3$, (variables, x, y) > *Sí*
=

Observación: Este método, permite resolver el sistema directamente.

#10: SOLVE ([2 · x + 4 · y = 0, 3 · x + 3 · y = 3], [x, y])

#11: $[x = 2 \wedge y = -1]$

Resolución del sistema

Se puede resolver directamente si en lugar de > Sí, se selecciona > Resolver

y sería:

BH

Resolver > Sistema (Número de ecuaciones 2, $2x + 4y = 0$, $3x + 3y = 3$, *Variables, x, y)*
> Resolver

#12: SOLVE ([2 · x + 4 · y = 0, 3 · x + 3 · y = 3], [x, y])

#13: $[x = 2 \wedge y = -1]$

O bien se ilumina la expresión de SOLVE [. .] y se simplifica con =

Iluminamos SOLVE ([2 · x + 4 · y = 0, 3 · x + 3 · y = 3], [x, y]):

BH

=

#14: $[x = 2 \wedge y = -1]$

Observaciones

1. Hay veces que conviene utilizar el operador SOLUTIONS ( ) para resolver el sistema.
2. Cuando el sistema no tiene solución DERIVE devuelve [ ].

4.1.2. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Como hemos visto, si tenemos la matriz A de los coeficientes de las incógnicas, el sistema es la expresión matricial $AX = B$.

Ejemplo

Se define A

BH

$A := [2, 3;\ 1, 5]$
$A\,[x, y]' = [2, 3]'$
=

O bien:

BH

$A\,[x;\ y] = [2;\ 3]$
=

#15: $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

#16: $A \cdot [x, y]' = [2, 3]'$

#17: $[2 \cdot x + 3 \cdot y = 2, x + 5 \cdot y = 3]$

#18: $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

#19: $\begin{bmatrix} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 2 \\ x + 5 \cdot y = 3 \end{bmatrix}$

4.1.3. Un sistema de ecuaciones lineales es la expresión analítica de una aplicación lineal

Ejemplo 4.1.1

El sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial:

BH

$A := [3, 2, -1;\ 2, 0, 1]$
$A\,[x;\ y;\ z] = [-1;\ 5]$

#20: $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

#21: $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar fácilmente que para los vectores imágenes de los vectores de la base el sistema tiene solución.

Por ejemplo (3, 2), tiene como solución (1, 0, 0).

En efecto:

BH

$A\,[1;\ 0;\ 0]$
=

#22: $$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#23: $$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.1.4. Cálculo del original de un vector en una aplicación lineal

Ejemplo 4.1.2

Utilizando la notación anterior.

Para resolver el sistema

Se ilumina la expresión $A\,[x;\ y;\ z] = [-1;\ 5]$:

BH

Resolver > Expresión (variables, x, y, z) > Algebraico, Real > Resolver

#24: $$\text{SOLVE}\left(A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real} \right)$$

#25: $[2 \cdot x + z = 5 \wedge 4 \cdot y - 5 \cdot z + 17 = 0]$

Luego tiene más de una solución, el sistema es compatible indeterminado.
Resolver el sistema respecto a dos variables:

BH

Resolver > Expresión (variables, x, y, Algebraico, Real) > Resolver

#26: SOLVE ($[2 \cdot x + z = 5 \wedge 4 \cdot y - 5 \cdot z + 17 = 0]$, $[y, z]$, Real)

#27: $\left[y = \frac{4 - 5 \cdot x}{2} \wedge z = 5 - 2 \cdot x\right]$

También utilizando SOLUTIONS (sistema, [variables separadas por comas])
Iluminar el sistema

BH

SOLUTIONS ($F3$, $[x, y, z]$)
=

#28: SOLVE ($[2 \cdot x + z = 5 \wedge 4 \cdot y - 5 \cdot z + 17 = 0]$, $[x, y, z]$)

#29: $\left[\left[@1, \frac{4 - 5 \cdot @1}{2}, 5 - 2 \cdot @1\right]\right]$

Es decir, se obtienen las ecuaciones paramétricas. Donde $@n$, corresponde a un parámetro.
Los parámetros se van numerando a medida que van apareciendo. Para saber cuántos parámetros contiene una expresión hay que contar los que aparecen en ella, sin fijarse en el entero, asociado.

4.1.5. Cálculo del original del núcleo de una aplicación lineal

Ejemplo 4.1.3

Utilizando la notación matricial:
Calcular el nucleo de la aplicación lineal que define A, es equivalente a calcular las soluciones del sistema homogéneo que resulta.

BH

$A\,[x;\ y;\ z] = [0;\ 0]$
=

#30: $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#31: $$\begin{bmatrix} 3 \cdot x + 2 \cdot y - z = 0 \\ 2 \cdot x + z = 0 \end{bmatrix}$$

Y se resuelve el sistema como se ha hecho anteriormente:
Iluminada la expresión anterior:

BH

SOLUTIONS ($F3$, $[x, y, z]$)
=

#32: $$\text{SOLUTIONS}\left(\begin{bmatrix} 3 \cdot x + 2 \cdot y - z = 0 \\ 2 \cdot x + z = 0 \end{bmatrix}, [x, y, z]\right)$$

#33: $$\left[\left[@2, -\frac{5 \cdot @2}{2}, -2 \cdot @2\right]\right]$$

Observación

El parámetro es único en esta expresión; sin embargo se llama @2 porque es el segundo parámetro de todos los que aparecen en este documento.

4.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

4.2.1. Teorema de Rouché Frobenius

Esta sección contiene:

1. Cómo se edita la matriz ampliada $A|B$ siendo B, la matriz de los términos independientes.
2. Cómo se comprueba que rg (A) = rg $(A|B)$.

Ejemplo

Se definen previamente las matrices A y B:

BH

A : = [2, 4, 1; 2, 2, 2; 1, 5, 2]

$B := [2;\ 1;\ 3]$

#34: $A := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

#35: $B := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1. Se considera el operador APPEND_COLUMNS, que nos permite añadir a una matriz vectores columna.

BH

$A\_amp := \text{APPEND\_COLUMNS}\ (A, B)$
=

#36: $A\_amp := \text{APPEND\_COLUMNS}\ (A, B)$

#37: $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Comparación de rangos; Se podría hacer uno a uno y comprobar después, o bien. para ver si son iguales utilizar el operador IDENTICAL?

BH

IDENTICAL? (RANK (*A*), RANK (*A_amp*))
=

#38: IDENTICAL? (RANK (*A*), RANK (*A_amp*))

#39: true

Efectivamente son iguales ya que:

BH

RANK (*A*)
=
RANK (*A_amp*)
=

#40: RANK (*A*)

#41: 3

#42: RANK (*A_amp*)

#43: 3

Observación IMPORTANTE:

Cuando hay algún parámetro como coeficiente, estos cálculos no son de fiar, ya que DERIVE considera el caso bueno del parámetro, es decir, el que hace el rango máximo.

Por lo tanto en tales sistemas hay que calcular por separado los posibles rangos según los posibles valores del parámetro o de los parámetros.

Ejemplo 4.2.1

Definir *A* como la matriz asociada a los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales. Cambiar el nombre del parámetro "*a*" por "*c*".

BH

$A := [c, 1, 1;\ 1, c, 1;\ 1, 1, c]$
$B := [1;\ 1;\ 1]$

#44: $A := \begin{bmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$

#45: $B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

se define $A|B$ como *A_amp*

BH

A_amp := APPEND_COLUMNS (*A*, *B*)
=

#46: *A_amp* := APPEND_COLUMNS (*A*, *B*)

#47:
$$\begin{bmatrix} c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \end{bmatrix}$$

Para ver los posibles valores del parámetro que hacen que el rango no sea máximo calculamos el determinante de A y factorizamos en c:

BH

DET (A)
=
Simplificar > Factorizar (variable c, Real, Racional) > Factorizar

#48: DET (A)

#49: $c^3 - 3 \cdot c + 2$

#50: $(c + 2) \cdot (c - 1)^2$

El paso siguiente es estudiar caso por caso el valor de c:
Se sustituye $c = -2$
Se ilumina la matriz A:

BH

Simplificar > Sustituir variable (c, nuevo valor –2) > Simplificar

#51:
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora hay que definir *A_amp* pero con la nueva matriz A.

BH

A_amp : = APPEND_COLUMNS (A, B)
=

#52: *A_amp* : = APPEND_COLUMNS (A, B)

#53:
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan los rangos:

BH

RANK (*A*)
=
RANK (*A_amp*)
=

#54: RANK (*A*)

#55: 2

#56: RANK (*A_amp*)

#57: 3

Para el caso $c = 1$, se seguiría el mismo procedimiento:

— Sustituir $c = 1$ en *A*.
— Definir la nueva *A_amp*.
— Calcular rangos.

#58:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#59: *A_amp* : = APPEND_COLUMNS (*A*, *B*)

#60:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#61: RANK (*A*)

#62: 1

#63: RANK (*A_amp*)

#64: 1

4.2.3. Sistemas lineales homogéneos

Ejemplo 4.2.2

Se calcula el rango.

BH

```
RANK ([1, 0, –2; –1, 1, 1; 1, 1, –3])
=
```

#65:
$$\text{RANK}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

#66: 2

4.3. Cálculo de soluciones

En los ejemplos anteriores se han resuleto directamente los sistemas de ecuaciones. Ahora se utilizarán otros procedimientos que agilizan el primer procedimiento.

4.3.1. Definición de sistema de Cramer

Ejemplo 4.3.1

Se calcula el determinante.

BH

```
DET ([1, –2, 1; 3, 1, 1; 1, 1, 1])
=
```

#67:
$$\text{DET}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#68: 6

4.3.2. Regla de Cramer

Para resolver un sistema de Cramer, $B = AX$, por la regla de Cramer, basta con hallar la matriz columna $A^{\wedge}(-1)\,B$, ya que corresponde el vector solución X.

Ejemplo 4.3.2

Definir A y calcular el determinante para comprobar que se trata de un sistema de Cramer.

BH

$A := [3, -4;\ 1, 5]$

#69: $A := \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

#70: DET (A)

#71: 19

Para concluir, se define B y se calcula el vector solución.

BH

$B := [1;\ -1]$
$A^{\wedge} - 1B$
=

#72: $B := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

#73: $A^{-1} \cdot B$

#74: $\begin{bmatrix} \frac{1}{19} \\ -\frac{4}{19} \end{bmatrix}$

Ejemplo 4.3.2, por la regla de Cramer

De nuevo, se define A:

BH

$A := [2, -3, 1;\ 1, -1, -1;\ 3, -5, 3]$
RANK (A)

#75: $$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

#76: RANK (A)

#77: 2

Por lo tanto, hay alguna ecuación, por ejemplo la tercera, que es redundante.
Editar el sistema de ecuaciones lineales y sustituir $z = \lambda$:

BH

$[2x - 3y + z = 2 \wedge x - y - z = -1 \wedge 3x - 5y + 3z = 5]$
Simplificar > Sustituir variable $(z = \lambda)$ *> Simplificar*

#78: $[2 \cdot x - 3 \cdot y + z = 2 \wedge x - y - z = -1 \wedge 3 \cdot x - 5 \cdot y + 3 \cdot z = 5]$

#79: $[3 \cdot x - 5 \cdot y + 3 \cdot \lambda = 5 \wedge 2 \cdot x - 3 \cdot y + \lambda = 2 \wedge x - y - \lambda = -1]$

Para resolver el sistema por Cramer, se define la nueva matriz de coeficientes y el nuevo vector de términos independientes.

BH

$A := [2, -3;\ 1, -1]$
$B := [2 - \lambda;\ -1 + \lambda]$

#80: $$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

#81: $$B := \begin{bmatrix} 2 - \lambda \\ -1 + \lambda \end{bmatrix}$$

y se resuelve:

BH

$A\text{^}-1B$
=

#82: $A^{-1} \cdot B$

#83:
$$\begin{bmatrix} 4 \cdot \lambda - 5 \\ 3 \cdot \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

4.3.3. Método de Gauss

En este apartado se utilizará de nuevo el método de reducción de filas que se consigue aplicando ROW_REDUCE (*A*).

Conviene decir que si *A* es no singular, mediante operaciones elementales se devuelve la matriz identidad, aplicando ROW_REDUCE (*A*).

Por ello en algunos casos las matrices transformadas no coincidirán con las del libro, pero sí las soluciones.

Ejemplo 4.3.4

Definir las matrices *A*, *B*, *A*|*B* = *A_B*

BH

A : = [2, 1, –1; 0, 1, –3; 1, –1, 2]
B : = [–1; –7; 10]
A_B : = APPEND_COLUMNS (*A*, *B*)
=

#84:
$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

#85:
$$B := \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

#86: *A_B* : = APPEND_COLUMNS (*A*, B)

#87:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Se calcula $(MA|MB) = U|C = U\_C$

BH

U_C : = ROW_REDUCE (A_B)
=

#88: U_C : = ROW_REDUCE (A_B)

#89:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema que resulta: $IX = MB$, es decir, $X = MB$: extrayendo la última columna de U_C.

BH

U_C COL [4]
=

#90: U_C COL [4]

#91:
$$\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.4. Otro método de resolución. La factorización *LU*

4.4.1. Obtención de la matriz L

Como sólo se trabaja con un elemento de cada fila para obtener la matriz L, es menos costoso y más "rápido" hacerlo a mano o con métodos programados.

FACTORIZACIÓN LU

Con DERIVE, únicamente se comprobará que en efecto $A = LU$.

Ejemplo 4.4.2

Definir A, U, L:

BH

$A := [1, 2, -1;\ -1, 2, -3;\ 3, -1, -2]$
$U := [1, 2, -1;\ 0, 4, -4;\ 0, 0, -6]$
$L := [1, 0, 0;\ -1, 1, 0;\ 3, -7/4, 1]$

#92:
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

#93:
$$U := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

#94:
$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{7}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula el producto LU, y se comprueba si coincide con A:

BH

LU
$=$

#95: $L \cdot U$

#96:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.4.3. Resolución de sistemas mediante la factorización LU

Ejemplo 4.4.3

Calculadas A, U, L, C:
Se define B y C:

BH

$B := [3;\ 13;\ -5]$
$C := [3;\ 16;\ 14]$

#97: $B := \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -5 \end{bmatrix}$

#98: $C := \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$

Resolver el sistema que resulta:

BH

$U[x;\ y;\ z] = C$
=
Resolver > Expresión (variables, x, y, z, Algebraico, Real) > Resolver

#99: $U \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C$

#100:
$$\begin{bmatrix} x + 2 \cdot y - z = 3 \\ 4 \cdot y - 4 \cdot z = 16 \\ -6 \cdot z = 14 \end{bmatrix}$$

#101: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} x + 2 \cdot y - z = 3 \\ 4 \cdot y - 4 \cdot z = 16 \\ -6 \cdot z = 14 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$

#102:
$$\left[x = -\frac{8}{3} \wedge y = \frac{5}{3} \wedge z = -\frac{7}{3}\right]$$

Ahora se resuelve el sistema inicial directamente, y se comparan las soluciones:

BH

$A\ [x;\ y;\ z] = \mathrm{B}$
=
Resolver > *Expresión (variables, x, y, z, Algebraico, Real)* > *Resolver*

#103: $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B$

#104: $\mathrm{SOLVE}\left(A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B, [x, y, z], \mathrm{Real} \right)$

#105: $\left[x = -\frac{8}{3} \wedge y = \frac{5}{3} \wedge z = -\frac{7}{3} \right]$

Que coincidan las soluciones no es ninguna novedad.

4.4.4. Posibles errores en el cálculo de soluciones de sistemas por ordenador. Matrices mal condicionadas

Se desea calcular 1/3.

BH

1/3
=
Simplificar > *Aproximar (Número de dígitos, 2)* > *Aproximar*

#106: $\frac{1}{3}$

#107: $\frac{1}{3}$

#108: 0.33

Si se ilumina de nuevo, 1/3 y aproximamos con 10 dígitos, el resultado tampoco es exacto. Por ello se comete un error cuando se trabaja con decimales.

#109: 0.3333333333

Resolver el sistema $x + y = 10,\ 0.001\ x + y = 10$

BH

Resolver > Sistema (número de ecuaciones, 2) > Sí
$x + y = 10,\ 0.001x + y = 10$, *variables, x, y > Resolver*

Observación:

Cuando hay problema para diferenciar el punto del producto con el de decimal, en el primero se deja un espacio después del punto.

#110: SOLVE ($[x + y = 10,\ 0.001 \cdot x + y = 10]$, $[x, y]$)

#111: $[x = 0 \wedge y = 10]$

Resolver $x + y = 10,\ x + 0.001\ y = 10$ de la misma manera.

#112: SOLVE ($[x + y = 10,\ x + 0.001 \cdot y = 10]$, $[x, y]$)

#113: $[x = 10 \wedge y = 0]$

Por último, se resuelve el sistema $x + y = 10,\ x + 1000\ y = 10000$ que es equivalente al primero.

#114: SOLVE ($[x + y = 10,\ x + 1000 \cdot y = 10000]$, $[x, y]$)

#115: $[x = 0 \wedge y = 10]$

Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

Los planos $P : ax + y + z = a;\ Q : x + y + az = b;\quad R : x + ay + z = b$ pertenecen al mimo haz (se cortan en una recta r). Calcúlense los valores de a y b o la relación que debe existir entre ellos para que eso sea posible.

Solución:

Para que formen un haz, el sistema que forman sus ecuaciones debe ser compatible indeterminado

$$\Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & a & 1 & b \end{array}\right) = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ o \\ a = 1 \end{cases} \text{. Si } a = -2, \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & b \\ -2 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 1, \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(b) = 2$$

y pertenecen al mismo haz los tres planos. Si $a = 1 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 1$, y no forman haz.

Ejercicio 2

Determínese el valor de a, si existe, para que la recta $\begin{cases} x + ay + z = -2 \\ 4x + 2y + az = -1 \end{cases}$ tenga por vector director unitario $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$.

Solución:

El vector director de la recta dada es $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 - 2{,}4 - a{,}2 - 4a\right)$ y proporcional al vector director unitario $\Rightarrow (a^2 - 2{,}4 - a{,}2 - 4a) = (t, t, 2t) \Rightarrow a = -3, t = 7$.

Ejercicio 3

Dado el sistema $2x + ay = 1$; $2x - y = 0$; $ax + by = -1$, se pide elegir, de entre las siguientes afirmaciones, las que hacen que el sistema sea compatible determinado:

a) $a = -1, b \neq 1/2$.
b) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0$.
c) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 \neq 0$.

Solución:

a) $a = -1, b \neq 1/2, \operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A \text{ ampl}) \Rightarrow$ Sistema incompatible.
b) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0, \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \text{ ampl}) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
c) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 \neq 0, \operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A \text{ ampl}) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Ejercicio 4

Dado el sistema $2x+3y-z=0;\ 3x+ay-z=0;\ -x-6y+z=a$, se pide elegir, de entre las siguientes afirmaciones, las que hacen que el sistema sea compatible determinado:

a) Cualquier valor de a.
b) $a \neq 0$.
c) $a=0$.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = a;$$

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} \text{rg}(A\,|\,b) = 3, \textit{ Si } a \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \\ \text{rg}(A\,|\,b) < 3, \textit{ Si } a = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \end{cases}$$

Ejercicio 5

Dadas las rectas: $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5};\ s: \dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z-1}{3}$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen.

a) Son paralelas.
b) Se cortan.
c) Se cruzan.

Solución:

$$\bar{r} = (2, 4, 5),\ P_r = (1, 3, 0),\ \bar{s} = (2, 1, 3),\ P_s = (3, 0, 1),\ \overline{P_rP_s} = (2, -3, 1).$$

a) No son paralelas, $\bar{r}$ y $\bar{s}$ no son proporcionales.

b) No se cortan porque $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

c) *Se cruzan.*

Ejercicio 6

Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases},$$

de entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas, si existen:

a) El sistema es siempre compatible.
b) Si $a = 2$, el sistema es incompatible.
c) Si $a \neq 2$, el sistema es incompatible.

Solución:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \forall\, a \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{cases} 4 \text{ si } a \neq 2, \text{ Sistema incompatible} \\ 3 \text{ si } a = 2, \text{ Sistema compatible determinado} \end{cases}$$

Ejercicio 7

Dadas las rectas $r: x + y = 1$; $s: 2x + 3y = 1$; $t: 3x + \alpha y = 2$. Calcúlense los valores de α para que las tres rectas formen triángulo.

Solución:

$\operatorname{rg}(M) = 2$; $\operatorname{rg}(A\,B) = \begin{cases} 3 \text{ si } \alpha \neq 4 \\ 2 \text{ si } \alpha = 4 \end{cases}$. Para $\alpha = 3$, r y t son paralelas. Para $\alpha = 9/2$, s y t son paralelas. Para $\alpha \neq 4$, $\alpha \neq 3$, $\alpha = 9/2$ se cortan dos a dos.

Ejercicio 8

Sean los planos $x-y+3z=1$; $3x-5y+7z+\beta=0$; $x-3y+\alpha z=2$. Determínese el valor de α y β para que los tres planos formen un triedro.

Solución:

	$\alpha\neq 1;\ \forall\ \beta$	$\alpha=1;\ \beta\neq -4$	$\alpha=1;\ \beta=-4$	Triedro (Se cortan en un punto)
rg(M)	3	2	2	Se cortan dos a dos
rg($M|B$)	3	3	2	Se cortan a lo largo de una recta

Ejercicio 9

Dada la recta $r:\begin{cases}5x-y-2z=1\\3x+y-z=2\end{cases}$, de entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen:

a) La recta r es paralela al plano $3x-y+8z=0$.
b) r contiene el vector de extremos (0, 0, 0), (3, –1, 8).
c) Cualquier vector de r es paralelo a (3, –1, 8).

Solución:

r en paramétricas:	Vector perpendicular al plano: (3, –1, 8)
$\begin{cases}x=\lambda\\y=1-\lambda/3\\z=-1+8\lambda/3\end{cases}$ $\bar{d}_r=\left(1,-\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$	*a*) Falsa, r es perpendicular al plano, no paralela. *b*) Falsa, r no pasa por (0, 0, 0) ni por (3, –1, 8) *c*) *Cierta*, $\bar{d}_r=\left(1,-\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$ es el vector director de r

Ejercicio 10

Dado el sistema $2x+3y-z=2$; $bx+ay+2z=0$; $5x+5y+z=0$. Entonces:

a) Si $a=2$ y $b=3$, el sistema es compatible indeterminado.
b) Si $b=3$ y $a\neq 2$ el sistema es compatible determinado.
c) Si $a=2$ y $b=5$ es incompatible.

Solución:

a) Es falsa,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ b & a & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 7a - 8b + 10.$$ Por tanto, si $a = 2$ y $b = 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|B)$

el sistema es incompatible.

La opción *b)* *es cierta,* ya que, si $b = 3$ y $a \neq 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$, y es sistema compatible determinado.

c) Es falsa, ya que, sería sistema compatible determinado.

Ejercicio 11

De entre las opciones siguientes elíjase la correcta. El plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ contiene a la recta:

a) $x = 1 + 2t, y = t, z = 2 - t.$
b) $x = 1 + t, y = -2 - 2t, z = 0.$
c) No contiene a ninguna de las anteriores.

Solución:

El plano π tiene como vector director $(2, 1, -1)$ y contiene a los vectores, $(1, -2, 0)$, $(0, 1, 1)$.

a) Falsa, porque el vector paralelo de la recta es perpendicular al plano.
b) *Verdadera,* porque el punto $(1, -2, 0) \in \pi$ y el vector director de la recta es $(1, -2, 0)$.
c) Falsa como consecuencia de las anteriores.

Ejercicio 12

Dado el sistema $2x + ay = 1$; $2x - y = 0$; $ax + by = -1$, se pide elegir de entre las siguientes condiciones, la que hace que sea compatible determinado:

a) $a = -1, b \neq 1/2.$
b) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0.$
c) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 \neq 0.$

Solución:

a) Falsa: $a = -1$, $b \neq 1/2$, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|ampl) \Rightarrow$ Sistema incompatible.
b) *Cierta:* $a \neq -1$, $3a + 2b + 2 = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|ampl) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
c) Falsa: $a \neq -1$, $3a + 2b + 2 \neq 0$. $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|ampl) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

Para que las tres rectas pertenezcan a un mismo haz, se debe cumplir que el determinante de la matriz de los coeficientes de las ecuaciones de los planos sea 0.

BH

DET ([a, 1, 1; 1, 1, a; 1, a, 1]) = 0
=
Resolver > Expresión > Variable a, Algebraico, Real > Resolver

#1: $$\text{DET}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} = 0$$

#2: $$-a^3 + 3 \cdot a - 2 = 0$$

#3: SOLVE ($-a^3 + 3 \cdot a - 2 = 0$, a, Real)

#4: $$a = -2 \vee a = 1$$

Si $a = 1$, el rango sería 1, por tanto debe ser $a = -2$ y además el rango de la matriz ampliada también debe ser 2.

Si se impone que todos menores de orden 3 sean 0, resulta:

BH

(DET ([1, 1, –2; 1, –2, b; –2, 1, b]) = 0) ∧
(DET ([–2, 1, –2; 1, –2, b; 1, 1, b]) = 0) ∧ (DET ([–2, 1, –2; 1, 1, b; 1, –2, b]) = 0)
=
Resolver > Expresión > (Varriable b, Algebraico, Real) > Resolver

#5: $$\text{DET}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & b \\ -2 & 1 & b \end{bmatrix} = 0 \wedge \text{DET}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix} = 0 \wedge \text{DET}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix} = 0$$

#6: $6 \cdot (1 - b) = 0 \wedge 6 - 6 \cdot b = 0 \wedge 6 \cdot b - 6 = 0$

#7: SOLVE ($6 \cdot (1 - b) = 0 \wedge 6 - 6 \cdot b = 0 \wedge 6 \cdot b - 6 = 0$, b, Real)

#8: $$b = 1$$

Ejercicio 2

La condición que se debe verificar es:

BH

DET ([$i\_, j\_, k\_$; 1, a, 1; 4, 2, a]) = [t, t, $2t$]
=

donde $i\_, j\_, k\_$, son los vectores unitarios.

Observación:

El programa DERIVE posee un archivo, (VECTOR.MTH) en el que están definidos los vectores unitarios $i\_, j\_, k\_$ y por tanto no haría falta definirlos, aunque en el caso de que falle o no los reconozca, se pueden definir previamente:

BH

$i\_ := [1, 0, 0]$
$j\_ := [0, 1, 0]$
$k\_ := [0, 0, 1]$

#9: $i\_ := [1, 0, 0]$

#10: $j\_ := [0, 1, 0]$

#11: $k\_ := [0, 0, 1]$

#12: $$\text{DET}\begin{bmatrix} i\_ & j\_ & k\_ \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{bmatrix} = [t, t, 2 \cdot t]$$

#13: $$\left[a^2 - 2 = t, 4 - a = t, 2 - 4 \cdot a = 2 \cdot t\right]$$

Resolver la expresión qe resulta:

BH

Resolver > Expresión
(Variables, a, t) > Resolver

#14: $$\text{SOLVE}\left(\left[a^2 - 2 = t, 4 - a = t, 2 - 4 \cdot a = 2 \cdot t\right], [a, t], \text{Real}\right)$$

#15: $$[a = -3 \wedge t = 7]$$

Ejercicio 3

Resolver el sistema:

BH

Resolver > Sistema > (3 ecuaciones) > Sí
$2x + ay = 1$
$2x - y = 0$
$ax + by = -1$
(variables x, y, a, b) > Resolver

Caso *a)* $a = -1$

BH

RANK ([2, –1; 2, –1; –1, *b*])
=
DET ([2, –1, 1; 2, –1, 0; –1, *b*, –1])
=

#16: $\text{RANK}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$

#17: 2

#18: $\text{DET}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & b & -1 \end{bmatrix}$

#19: $2 \cdot b - 1$

Caso *b)* $a \neq -1$

BH

RANK ([2, *a*; 2, –1; *a*, *b*])
DET ([2, *a*, 1; 2, –1, 0; *a*, *b*, –1])
=

#20: $\text{RANK}\begin{bmatrix} 2 & a \\ 2 & -1 \\ a & b \end{bmatrix}$

#21: 2

#22: $\text{DET}\begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$

#23: $3 \cdot a + 2 \cdot (b + 1)$

Ejercicio 4

Método 1: Utilizando rangos.
Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

BH

DET ([2, 3, –1; 3, *a*, –1; –1, –6, 1])
=

#24: $\text{DET}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

#25: a

Método 2: Resolviendo el sistema:

BH

Resolver > *Sistema*
número de ecuaciones 3 > Sí
$2x + 3y - z = 0$
$3x + ay - z = 0$
$-x - 6y + z = a$
Variables x, y, z > *Sí*
=

#26: SOLVE ($[2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 0, 3 \cdot x + a \cdot y - z = 0, -x - 6 \cdot y + z = a], [x, y, z]$)

Si $a = 0$:

BH

Simplificar > *Sustituir variable* ($a = 0$) > *Sí*

#27: SOLVE ($[2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 0, 3 \cdot x + 0 \cdot y - z = 0, -x - 6 \cdot y + z = 0], [x, y, z]$)

#28: $[3 \cdot x - z = 0 \wedge 9 \cdot y - z = 0]$

Luego si $a \neq 0$, sería sistema compatible Indeterminado.
Si, por ejemplo, $a = 2$:
Se ilumina el sistema inicial:

BH

F3
Simplificar > *Sustituir variable* $(a = 2)$ > *Sí*
=

#29: SOLVE $([2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 0, 3 \cdot x + a \cdot y - z = 0, -x - 6 \cdot y + z = a], [x, y, z])$

#30: SOLVE $([2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 0, 3 \cdot x + 2 \cdot y - z = 0, -x - 6 \cdot y + z = 2], [x, y, z])$

#31: $[x = -1 \wedge y = -1 \wedge z = -5]$

Ejercicio 5

Se abre una ventana 3D, y se representan, una a una, las rectas dadas.
Primero se pasan a paramétricas las ecuaciones implícitas para representar en el espacio:

BH

$(x - 1) / 2 = (y - 3) / 4 = z / 5$

Se ilumina la primera igualdad:

#32: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5}$

BH

F3
Resolver > *Expresión*
(variables x, y, Algebraico, Real)
> *Resolver*

#33: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4}$

#34: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4}, [x, y], \text{Real}\right)$

#35: $2 \cdot x - y + 1 = 0$

Se escribe la segunda igualdad (o iluminamos y *F*3):

BH

$(y - 3) / 4 = z / 5$
Resolver > *Expresión*
(variables y, z, Algebraico, Real) > *Resolver*

#36: $\dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5}$

#37: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{5}, [x, y], \text{Real}\right)$

#38: $5 \cdot y - 4 \cdot z - 15 = 0$

Para obtener las paramétricas, se sustituye "$y = \lambda$", por ejemplo, y se despeja en cada ecuación x, z respectivamente:

BH

$y := \lambda$

Iluminar la primera ecuación:

BH

Resolver > *Expresión*
(Variable x, Algebraico, Real) > *Resolver*

Iluminar la segunda ecuación:

BH

Resolver > *Expresión*
(Variable z, Algebraico, Real) > *Resolver*

#39: $y := \lambda$

#40: $\text{SOLVE}(2 \cdot x - y + 1 = 0, x, \text{Real})$

#41: $x = \dfrac{\lambda - 1}{2}$

#42: SOLVE $(5 \cdot y - 4 \cdot z - 15 = 0, z, \text{Real})$

#43: $$x = \frac{5 \cdot (\lambda - 3)}{4}$$

Luego la recta r, en paramétricas sería:

$$[(\lambda - 1) / 2.\ \lambda,\ (5\lambda - 15) / 4]$$

Para la otra recta se razonaría de forma análoga:

#44: $$\frac{x - 3}{2} = y = \frac{z - 1}{3}$$

#45: $y := \beta$

#46: $$\frac{x - 3}{2} = y$$

#47: $$\text{SOLVE}\left(\frac{x - 3}{2} = y, x, \text{Real}\right)$$

#48: $$x = 2 \cdot \beta + 3$$

#49: $$y = \frac{z - 1}{3}$$

#50: $$\text{SOLVE}\left(y = \frac{z - 1}{3}, z, \text{Real}\right)$$

#51: $z = 3 \cdot \beta + 1$

Es decir sería:

$$[2\beta + 3,\ \beta,\ 3\beta + 1]$$

Se representan una a una cada recta:
Abrir una ventana 3D:

BH

$[(\lambda - 1) / 2,\ \lambda,\ (5\lambda - 15) / 4]$
Representar > Gráfica
$[2\beta + 3,\ \beta,\ 3\beta + 1]$
Representar > Gráfica

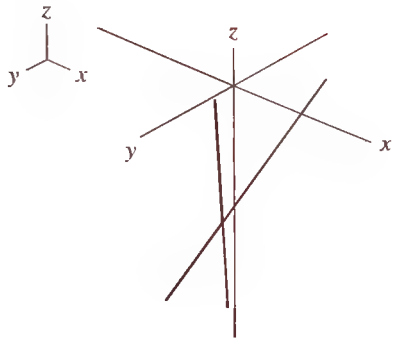
Usando las opciones de 3D se observa que se cruzan (se aconseja cambiar los rangos de los ejes x, y, z y girar la gráfica).

BH

Seleccionar > Rango de la Gráfica

#52: $\left[\frac{\lambda-1}{2}, \lambda, \frac{5\cdot\lambda-15}{4}\right]$

#53: $[2\cdot\beta+3, \beta, 3\cdot\beta+1]$



Además no se cortan porque:

BH

DET ([2, 4, 5; 2, 1, 3; 2, –3, 1])
=

#54: $\text{DET}\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$

#55: –4

Ejercicio 6

Caso *a)* Método 1:
Resolver el sistema lineal:

BH

Resolver > Sistema (4 ecuaciones)
$ax+y+z=a^2$
$x-y+z=1$
$3x-y-z=1$
$6x-y+z=3a$
(variables, x, y, z) > Resolver

#56: SOLVE ($[a \cdot x + y + z = a^2, x - y + z = 1, 3 \cdot x - y - z = 1, 6 \cdot x - y + z = 3 \cdot a]$, [$y$, x, z])

#57: [ ]

Caso *a)* Método 2:
Calcular el rango (para cualquier a):

BH

RANK ([a, 1, 1; 1, –1, 1; 3, –1, –1; 6, –1, 1])
=

#58: $\text{RANK}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

#59: 3

Se calcula el rango de la matriz ampliada, igualando su determinante a 0:

BH

DET ([a, 1, 1, a^2; 1, –1, 1, 1; 3, –1, –1, 1; 6, –1, 1, $3a$]) = 0
=
Resolver > Expresión (variable a, Algebraico, Real)
> Resolver

#60: $\text{DET}\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3 \cdot a \end{bmatrix} = 0$

#61: $-4 \cdot (a^2 - 4 \cdot a + 4) = 0$

#62: SOLVE ($-4 \cdot (a^2 - 4 \cdot a + 4) = 0$, a, Real)

#63: $a = 2$

Ejercicio 7

Evidentemente el rango de la matriz de los coeficientes es 2, basta por tanto, calcular el determinante de la matriz ampliada:

BH

Ampli : = [1, 1, 1; 2, 3, 1; 3, α, 2]
DET (Ampli)
=

#64: $\text{Ampli} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$

#65: DET (Ampli)

#66: $\alpha - 4$

El lector puede representar en una ventana 2D, cada recta en paramétricas, para comprobar las distintas posiciones.

Ejercicio 8

Calcular el determinante de la matriz de los coeficientes:

BH

M : = [1, –1, 3; 3, –5, 7; 1, –3, α]
DET (M)
=

#67: $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$

#68: DET (M)

#69: $2 - 2 \cdot \alpha$

Se supone que $\alpha = 1$, y se calcula el rango de la matriz ampliada:

BH

AmplM: = [1, –1, 3, 1; 3, –5, 7, –β; 1, –3, 1, 2]

o bien:

BH

AmplM: = APPEND_COLUMNS (M, [1; –β; 2])
=

#70: $\text{AmplM} := \text{APPEND\_COLUMNS}\left(\text{M}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

#71:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -\beta \\ 1 & -3 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

Para obtener el rango de la matriz ampliada para $\alpha = 1$ se calculan todos los determinantes de los distintos menores de orden 3 de dicha matriz:

BH

$\alpha := 1$

#72: $\alpha := 1$

Se elimina la primera columna de la AmplM y se calcula el determinante de la matriz resultante:

BH

DET (DELETE (AmplM', 1))
=

#73: DET (DELETE (AmplM', 1))

#74: $8 \cdot (\beta + 4)$

Se repite el procedimiento para los menores siguientes:
Se elimina la segunda columna de la AmplM y se calcula el determinante:

BH

DET (DELETE (AmplM', 2))
=

#75: DET (DELETE (AmplM', 2))

#76: $-2 \cdot \beta - 8$

Se elimina la tercera columna de la AmplM y se calcula el determinante:

BH

DET (DELETE (AmplM', 3))
=

#77: DET (DELETE (AmplM', 3))

#78: $-2 \cdot \beta - 8$

Por tanto, para $\beta = -4$ y $\alpha = 1$ el rango de la matriz ampliada es 2.

Ejercicio 9

Se abre una ventana 3D, y se representan los subespacios, uno a uno, después de haber obtenido las expresiones paramétricas de las rectas.

Opción *a)*
La recta dada en implícitas, se pasa a paramétricas:

BH

$r := 5x - y - 2z = 1 \wedge 3x + y - z = 2$

#79: $r := 5 \cdot x - y - 2 \cdot z = 1 \wedge 3 \cdot x + y - z = 2$

Como es una recta sólo tiene un parámetro.
Para obtener las paramétricas, se sustituye "$y = \lambda$", por ejemplo, y se despeja en cada ecuación x, z respectivamente:

BH

$y := \lambda$

Iluminar la ecuación:

BH

Resolver > Expresión
(Variable x, z, Algebraico, Real) > Resolver

#80: $y := \lambda$

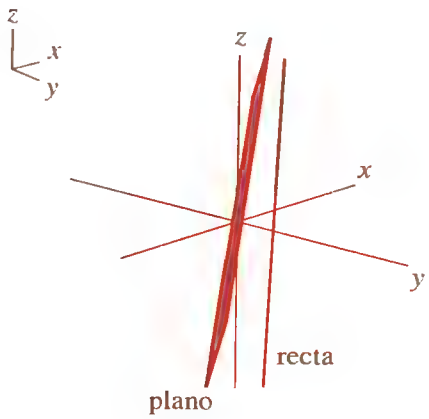
#81: SOLVE $(5 \cdot x - y - 2 \cdot z = 1 \wedge 3 \cdot x + y - z = 2, [x, z], \text{Real})$

#82: $x = 3 \cdot (1 - \lambda) \wedge z = 7 - 8 \cdot \lambda$

Ya se puede abrir la ventana 3D y representar la recta, $[3-3\lambda,\ \lambda,\ 7-8\lambda]$:

BH

$[3-3\lambda,\ \lambda,\ 7-8\lambda]$
Insertar > *Gráfica*
$3x-y+8z=0$
Insertar > *Gráfica*



#83: $[3-3\cdot\lambda,\ \lambda,\ 7-8\cdot\lambda]$

#84: $3\cdot x-y+8\cdot z=0$

Caso *b)*
Se limpia la variable *y*:

BH

$y:=$

Para ver si es cierto, basta con ver si los extremos verifican las ecuaciones de la recta *r*:

BH

r
=
Simplifica > *Sustituir variable* (*x por* 0, *y por* 0, *z por* 0)
> *Simplificar*

#85: $y:=$

#86: *r*

#87: $5\cdot x-y-2\cdot z=1\wedge 3\cdot x+y-z=2$

#88: $0=2\wedge 0=1$

Luego *b)* sería falsa.
Caso *c)*.
Cierta como consecuencia de los resultados anteriores.

Ejercicio 10

Método 1. Con rangos:
Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes:

BH

DET ([2, 3, –1; *b*, *a*, 2; 5, 5, 1])
Simplificar > *Normal* (=)

#89: $\text{DET}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ b & a & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

#90: $7 \cdot a - 2 \cdot (4 \cdot b - 5)$

CASO *a)* Se sustituye el valor de la variable *a*. Se ilumina el determinante:

BH

Simplificar > *Sustituir variable* ($a = 2$) > *Simplificar*

#91: $8 \cdot (3 - b)$

CASO *b)* Se limpia la variable *a*:

BH

$a :=$

Iluminar el determinante:

BH

Simplificar > *Sustituir variable* ($b = 3$) > *Simplificar*

#92: $a :=$

#93: $7 \cdot a - 14$

en el CASO *c)* se procedería análogamente.

Método 2. Resolviendo el sistema:
Escribir el sistema:

BH

Resolver > *Sistema* (*variables* x, y, z) > *Sí*

#94: SOLVE $([2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 2, b \cdot x + a \cdot y + 2 \cdot z = 0, 5 \cdot x + 5 \cdot y + z = 0], [x, y, z])$

CASO *a)* Sustituir, se ilumina SOLVE (...):

BH

Simplificar > *Sustituir variable* > $a = 2$ > *Simplificar*

#95: SOLVE $([2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 2, b \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z = 0, 5 \cdot x + 5 \cdot y + z = 0], [x, y, z])$

#96: $$\left[x = \frac{2}{b-3} \wedge y = \frac{1}{4} - \frac{7}{4 \cdot (b-3)} \wedge z = \frac{5 \cdot (2-b)}{4 \cdot (b-3)}\right]$$

CASO *b)* Limpiar la variable a

BH

$a :=$

Se ilumina la expresión SOLVE (...), con las variables: x, y, z, a, b

BH

Simplificar > *Sustituir variable* > $b = 3$ > *Simplificar*

#97: $a :=$

#98: $$\left[x = \frac{2 \cdot (a-10)}{7 \cdot (a-2)} \wedge y = \frac{2}{a-2} \wedge z = \frac{10 \cdot (a-3)}{7 \cdot (2-a)}\right]$$

CASO *c)*
Limpiar las variables a, b:

BH

$a :=$
$b :=$

Iluminar la expresión SOLVE (...) con las variables: x, y, z, a, b:

BH

Simplificar > *Sustituir variable* > $b = 5$ > *Sí*
Simplificar > *Sustituir variable* > $a = 2$ > *Simplificar*

#99: $a :=$

#100: $b :=$

#101: $\left[x = 1 \wedge y = -\frac{5}{8} \wedge z = -\frac{15}{8}\right]$

Ejercicio 11

Abrir una venta 3D

BH

Ventana > *Nueva* 3D

Escribir la ecuación del plano:

BH

$2x + y - z = 0$

Representar:

BH

Insertar > *Gráfica*

Se repite el procedimiento con las rectas que ya están en paramátricas:

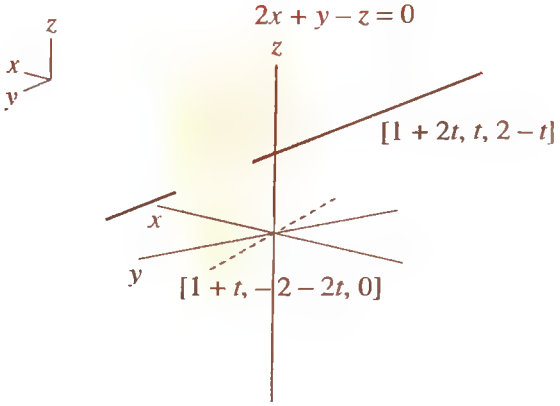
BH

$[1 + 2t, t, 2 - t]$
Insertar > *Gráfica*
$[1 + t, -2 - 2t, 0]$
Insertar > *Gráfica*

#102: $2 \cdot x + y - z = 0$

#103: $[1 + 2 \cdot t, t, 2 - t]$

#104: $[1 + t, -2 - 2 \cdot t, 0]$



Para ver mejor la gráfica se puede ampliar haciendo doble clik sobre la gráfica.

Ejercicio 12

Se iguala el determinante de la matriz ampliada de los coeficientes a 0:

BH

DET ([2, a, 1; 2, −1, 0; a, b, −1]) = 0
=

#105: $$\text{DET}\begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix} = 0$$

#106: $$3 \cdot a + 2 \cdot (b + 1) = 0$$

Caso *a)* Si $a = -1$:

Se ilumina la expresión anterior y se sustituye:

BH

Simplificar > *Sustituir variable* ($a = -1$)
> *Simplificar*

#107: $2 \cdot b - 1 = 0$

Para que el sistema sea compatible determinado el rango de la matriz de coeficientes debe coincidir con el rango de la matriz ampliada; por tanto, si se observa el último resultado, la opción *a)* es falsa y la opción correcta es *b)* $a \neq -1,\ 3a + 2b + 2 = 0$.

#108: SOLVE $(6 \cdot (1 - b) = 0 \wedge 6 - 6 \cdot b = 0 \wedge 6 \cdot b - 6 = 0, b, \text{Real})$

#109: $b = 1$

CAPÍTULO 5

PRODUCTO ESCALAR

5.1. Producto escalar de vectores y espacio euclídeo

En DERIVE, el producto escalar de dos vectores se denota por "·", el producto escalar incorporado por defecto es el usual (definido en Ejemplo 5.1.1), es decir, la suma de los productos de las coordenadas que ocupan el mismo lugar.

Ejemplo

Calcúlese el producto escalar de los vectores (2, 3, 1) y (0, 2, 3).

BH

[2, 3, 1] · [0, 2, 3]
=

#1: [2, 3, 1] · [0, 2, 3]

#2: 9

Es evidente que los vectores deben de tener el mismo número de coordenadas para poder hacer su producto.

También admite el operador "∗" cuando los operandos son vectores.

Ejemplo

Calcúlese $(a, 1, 3) \cdot (1, 3, 5)$

BH

$[a, 1, 3] * [1, 3, 5]$
$=$

#3: $[a, 1, 3] \cdot [1, 3, 5]$

#4: $a + 18$

Observación importante

Para no confundir el punto del producto con el punto del decimal se recomienda dejar un espacio después del punto en el primer caso.

Para ver si una operación determinada es producto escalar o no, se define la operación y se comprueba si verifica los axiomas de producto escalar.

Se puede ver en el ejemplo 5.1.2.:

Definimos la operación:

BH

$p := ax + b$
$q := cx + d$
Pro_esc $(p, q) :=$ INT $(pq, x, 0, 1)$

Es necesario definir los polinomios p y q porque si no DERIVE los considerará números reales a la hora de comprobar los axiomas.

#5 $p := a \cdot x + b$

#6: $q := c \cdot x + d$

#7: Pro_esc $(p, q) := \int_0^1 p \cdot q \, dx$

Y se comprueban los axiomas uno a uno usando el operador IDENTICAL? (,)

Axioma 1

BH

IDENTICAL? (Pro_esc (p, q), Pro_esc (q, p))
$=$

#8: IDENTICAL? (Pro_esc (p, q), Pro_esc (q, p))

#9: true

Axioma 2

BH

IDENTICAL? (Pro_esc (λp, q), λPro_esc (q, p))
=

#10: IDENTICAL? (Pro_esc ($\lambda \cdot p$, q), $\lambda \cdot$ Pro_esc (q, p))

#11: true

Axioma 3

Como se incluye otro polinomio, hay que definirlo directa o indirectamente.

BH

$h := ex + f$
IDENTICAL? (Pro_esc ($p + h$, q), Pro_esc (p, q) + Pro_esc (h, q))
=

#12: $h := e \cdot x + f$

#13: IDENTICAL? (Pro_esc ($p + h$, q), Pro_esc (q, p) + Pro_esc (h, q))

#14: true

Axioma 4

Se comprueba que $p \cdot p \geq 0$

BH

Pro_esc (p, p)
=

#15: Pro_esc (p, p)

#16: $$\frac{a^2 + 3 \cdot a \cdot b + 3 \cdot b^2}{3}$$

Ver factorización hecha en el libro.

Observación

DERIVE considera que las variables son "buenas", en el sentido que son distintas de 0. Por ello se obtiene el resultado anterior.

5.2. Norma de un vector y ángulo entre dos vectores

La norma que posee DERIVE definida por defecto es la asociada al único producto escalar que tiene definido, es decir: al producto euclídeo usual.

El operador es "ABS ( )".

Ejemplo 5.2.1

BH

ABS ([$x \downarrow 1, x \downarrow 2$])
=

#17: $|[x_1, x_2]|$

#18: $$\sqrt{\left(\frac{x_1^2 \cdot \text{SIGN}(x_2)^2 + x_2^2 \cdot \text{SIGN}(x_1)^2}{\text{SIGN}(x_1 \cdot x_2)^2}\right)}$$

En particular para el vector (2, 3)

BH

ABS ([2, 3])
=

#19: $|[2, 3]|$

#20: $\sqrt{13}$

Ejemplo 5.2.2. para una norma distinta de la euclídea.
Como ya se ha definido el producto escalar, bastará con definir p y q como:

BH

$p := x$
$q := 1 - x$

y a continuación calcular el producto escalar. Por definición de norma, el problema es equivalente a:

BH

$\sqrt{\text{Pro\_esc}}\,(p, p)$

=

$\sqrt{\text{Pro\_esc}}\,(q, q)$

=

#21: $p := x$

#22: $q := 1 - x$

#23: $\sqrt{\ }\,(\text{Pro\_esc}\,(p, p))$

#24: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

#25: $\sqrt{\ }\,(\text{Pro\_esc}\,(q, q))$

#26: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5.4.6. Definición de matriz ortogonal

Aunque DERIVE sólo tiene definido por defecto el producto escalar euclídeo usual, una vez que se ha obtenido la base ortonormada por el método de GRAM-SCHMIDT, la matriz métrica es la identidad y el producto escalar es el usual.

Ejemplo 5.4.3

a) Definimos A y comprobamos que es ortogonal:

BH

$A := [1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt{3}\ ;\ 1/\sqrt{6}\ ,\ -2/\sqrt{6}\ ,\ 1/\sqrt{6}\ ;\ -1/\sqrt{2}\ ,\ 0,\ 1/\sqrt{2}\ ]$

$A'A$

=

#27: $A := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

#28: $A' \cdot A$

#29: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b)
Definir *u*, *v*, *w*, utilizando el operador "SUB", para extraer una fila de una matriz.

BH

$u := \text{ASUB1}$
$=$
$v := \text{ASUB2}$
$=$
$w := \text{ASUB3}$
$=$

Para extraer columnas DERIVE posee el operador "SUB SUB".

#30: $u := A_1$

#31: $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

#32: $v := A_2$

#33: $\left[\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right]$

#34: $w := A_3$

#35: $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

i) Se comprueba que en efecto u, v, w son vectores normalizados:

BH

ABS (u)
=
ABS (v)
=
ABS (w)
=

#36: $|u|$

#37: 1

#38: $|v|$

#39: 1

#40: $|w|$

#41: 1

ii) Además son ortogonales entre sí:

BH

$u \cdot v$
=
$u \cdot w$
=
$v \cdot w$
=

#42: $u \cdot v$

#43: 0

#44: $u \cdot w$

#45: 0

#46: $v \cdot w$

#47: 0

5.4.7. Producto escalar en un espacio vectorial con una base ortonormal

En este caso, como se ha visto en ejemplos anteriores, se puede trabajar con DERIVE con el producto escalar usual sin necesidad de definirlo.

Véase como ejemplo el 5.4.3, el anterior.

La dificultad está en hallar la base ortonormal, lo que se haría resolviendo las ecuaciones que resultan al aplicar el Método de GRAM-SCHMIDT.

5.4.8. Subespacios ortogonales

Ejemplo 5.4.4

Se definen los vectores

BH

$$u := [1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 0, 2/\sqrt{6}]$$
$$v := [2/\sqrt{6}, 0, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}]$$

#48: $$u := \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]$$

#49: $$v := \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

y se comprueba que son ortonormales:

BH

$u \cdot v$
=
ABS (u)
=
ABS (v)
=

#50: $u \cdot v$

#51: 0

#52: $|u|$

#53: 1

#54: $|v|$

#55: 1

Para comprobar que los vectores u, v y $(0, 0, 3, -1)$ son linealmente independientes, se calcula el rango de la matriz que forman estos vectores.

BH

RANK ([[0, 0, 3, –1], u, v])
=

#56: RANK ([[0, 0, 3, –1], u, v])

#57: 3

Se calculan los productos escalares (por simplificar notación se utiliza $\lambda \downarrow 1 = \eta$, $\lambda \downarrow 2 = \delta$):

BH

$\eta := [0, 0, 3, -1] \cdot u$
=

#58: $\eta := [0, 0, 3, -1] \cdot u$

#59: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

BH

$\delta := [0, 0, 3, -1] \cdot v$
=

#60: $\delta := [0, 0, 3, -1] \cdot v$

#61: $\frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3}$

Luego el vector buscado es:

BH

$e := [0, 0, 3, -1] - (\eta \cdot u + \delta \cdot v)$
=

#62: $e := [0, 0, 3, -1] - (\eta \cdot u + \delta \cdot v)$

#63: $\left[-1, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Además el vector e es ortogonal a los vectores u y v. En efecto,

BH

$e \cdot u$
=
$e \cdot v$
=

#64: $e \cdot u$

#65: 0

#66: $e \cdot v$

#67: 0

Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

Los puntos (2, 6), (2, 2), y (5, 3) son tres vértices de un paralelogramo. Calcúlese la norma de sus diagonales (utilizando el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^2$).

Solución:

Las diagonales de un paralelogramo de lados los vectores libres:

$$\overline{u} = \big((5, 3) - (2, 2)\big) = (3, 1) \text{ y } \overline{v} = \big((2, 6) - (2, 2)\big) = (0, 4),$$

son:

$$\overline{u} + \overline{v} = (3, 1) + (0, 4) = (3, 5) \text{ y } \overline{u} - \overline{v} = (3, 1) - (0, 4) = (3, -3).$$

Las normas pedidas son:

$$\|(3,5)\| = \sqrt{(3,5)\cdot(3,5)} = \sqrt{34} \text{ y } \|(3,-3)\| = \sqrt{(3,-3)\cdot(3,-3)} = \sqrt{18}$$

Ejercicio 2

Se considera el espacio vectorial de los polinomios y el producto escalar $P_1(x)\cdot P_2(x) = \int_0^1 P_1(x)\cdot P_2(x)\,dx$. Determínese la norma de $P_1(x) = mx+1$ sabiendo que es ortogonal al polinomio $P_2(x) = x^2$.

Solución:

$$\int_0^1 (mx+1)\,x^2\,dx = \frac{m}{4}+\frac{1}{3} = 0 \Rightarrow m = -\frac{4}{3};\ \int_0^1 (-\frac{4}{3}x+1)(-\frac{4}{3}x+1)\,dx = \frac{7}{27} \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{27}}$$

Ejercicio 3

Sean $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse dos que sean correctas, si existen: la aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(\bar{x},\bar{y}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & 4\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

no es producto escalar:

a) si $\lambda = 0$.
b) si $\lambda = 1$.
c) si $\lambda = -1$.

Solución:

Una de las condiciones para que sea producto escalar es: $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x} \Rightarrow$ son valores posibles $\lambda = 1$, $\lambda = -1 \Rightarrow$

a) si $\lambda = 0$, no se cumple $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$.
b) para $\lambda = 1$ sí es producto escalar. (Es fácil comprobar el resto de las propiedades).
c) para $\lambda = -1$, puede no cumplirse $\bar{x}\cdot\bar{x} > 0$.

Ejercicio 4

En $\mathbb{R}^3$ se define el producto escalar

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{y}'.$$

De entre las opciones siguientes, elíjanse las verdaderas si existen: la norma de (1, 2, 1) es:

a) $\sqrt{14}$.
b) 6.
c) $\sqrt{6}$.

Solución:

$$(1 \quad 2 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 14,$$ es válida *la opción a.*

Ejercicio 5

Sea V el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor que dos, con una indeterminada x. Considérese en V el producto escalar $p(x)^* q(x) = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen. El vector $2x - 3$ es ortogonal a:

a) $3x + 2$.
b) $9x + 2$.
c) $2x + 3$.

Solución:

a) $\int_{-1}^{1} (2x - 3)(3x + 2)\, dx \neq 0$.

b) $\int_{-1}^{1} (2x - 3)(9x + 2)\, dx = 0$.

c) $\int_{-1}^{1} (2x - 3)(2x + 3)\, dx \neq 0$. Sólo son ortogonales $2x - 3$ y $9x + 2$.

Ejercicio 6

Sea V el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor que tres, con una indeterminada x y $\{1, x, x^2\}$ una base de V. Considérese en V el producto escalar $p(x)^* q(x) = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx$:

a) Determínese la matriz que define este producto escalar.
b) ¿Es ortonormada la base dada (con la norma dada)?
c) Escríbase la norma de $x^2 - 1$.

Solución:

$\int_{-1}^{1} (1)\,(1)\, dx = 2$; $\int_{-1}^{1} (x^2)\,(x^2)\, dx = \frac{2}{5}$; $\int_{-1}^{1} (1)\,(x^2)\, dx = \frac{2}{3}$; $\int_{-1}^{1} (x)\,(x)\, dx = \frac{2}{3}$; $\int_{-1}^{1} (1)\,(x)\, dx = 0$; $\int_{-1}^{1} (x)\,(x^2)\, dx = 0$;	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

b) No lo es porque la matriz de su producto escalar no es I porque la norma de sus vectores no es 1 entonces el producto escalar entre dos cualesquiera distintos no es 0.

c) $\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,(x^2 - 1)\, dx = \frac{16}{15}$; $\|x^2 - 1\| = \sqrt{\frac{16}{15}}$

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

Calcúlese la norma euclídea de los vectores que forman las diagonales del paralelogramo, $u + v = (3, 5)$ y $u - v = (3, -3)$, usando el operador "ABS".

BH

```
ABS ([3, –3])
=
ABS ([3, 5])
=
```

#1: |[3, –3]|

#2: $3 \cdot \sqrt{2}$

#3: |[3, 5]|

#4: $\sqrt{34}$

Ejercicio 2

Defínase el producto escalar:

BH

Producto_escalar (*P*, *Q*) : = INT (*PQ*, *x*, 0, 1)

#5: Producto_escalar $(P, Q) := \int_0^1 P \cdot Q \, dx$

Por ser ortogonales debe cumplirse:

BH

Producto_escalar (*mx* + 1, *x*^2) = 0
=

#6: Producto_escalar $(m \cdot x + 1, x^2) = 0$

#7: $\frac{m}{4} + \frac{1}{3} = 0$

Resolver la ecuación anterior en *m*:

BH

Resolver > *Expresión (variable m, Algebraico, Real)* > *Resolver*

#8: $\text{SOLVE}\left(\frac{m}{4} + \frac{1}{3} = 0, m, \text{Real}\right)$

#9: $m = -\frac{4}{3}$

Calcular el producto escalar de P:

BH

Producto_escalar ((–4/3) x + 1, (–4/3) x + 1)
=

#10: $\text{Producto\_escalar}\left(\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot x+1,\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot x+1\right)$

#11: $\frac{7}{27}$

La norma de P es:

BH

$\sqrt{}(F3)$
=

#12: $\sqrt{\left(\frac{7}{27}\right)}$

#13: $\frac{\sqrt{21}}{9}$

Ejercicio 3

Se definen u y v como vectores:

BH

Definir > *Dominio de variable*
nombre u, Dominio vector > *Sí*
Definir > *Dominio de variable*
nombre v, Dominio vector > *Sí*

Se define la operación producto escalar:

BH

Definir > *Función*
Nombre, Prod_esc (*u*, *v*), *Función*, *u* [1, 1; λ^2, 4λ] *v* > *Sí*

#14: $u : \in$ Vector

#15: $v : \in$ Vector

#16: $\text{Prod\_esc}\ (u, v) := u \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & 4 \cdot \lambda \end{bmatrix} \cdot v'$

Caso *a*) si $\lambda = 0$:
Se ilumina la operación Prod_esc:

BH

Simplificar > *Sustituir variable*
(*Variable* λ, *Nuevo valor* 0) > *Sí*

#17: $\text{Prod\_esc}\ (u, v) := u \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0^2 & 4 \cdot 0 \end{bmatrix} \cdot v'$

En este caso no es producto escalar porque no se verifica que Prod_esc (u, v) = Prod_esc (v, u). En efecto,

BH

$u := [a, b]$
$v := [c, d]$

#18: $u := [a, b]$

#19: $v := [c, d]$

Se comprueba que no es producto escalar:

BH

IDENTICAL? (Prod_esc (u, v), Prod_esc (v, u))
=

#20: IDENTICAL? (Prod_esc (u, v), Prod_esc (v, u))

#21: false

Es fácil comprobar que:

#22: Prod_esc (u, v)

#23: $a \cdot (c + d)$

#24: Prod_esc (v, u)

#25: $a \cdot c + b \cdot c$

Opción *c*)
Limpiar las variables:

BH

$v :=$
$u :=$
$\lambda :=$

Si $\lambda = -1$:
se ilumina la operación primera Prod_esc:

BH

Simplificar > *Sustituir variable*
(*Variable* λ, *Nuevo valor* -1) > *Sí*

#26: $v :=$

#27: $u :=$

#28: $\lambda :=$

#29: $\text{Prod\_esc}(u, v) := u \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (-1)^2 & 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} \cdot v'$

Se comprueba que no es producto escalar, ya que puede ser $u \cdot u < 0$:

BH

Prod_esc ([a, b], [a, b])
=

#30: Prod_esc ([a, b], [a, b])

#31: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b - 4 \cdot b^2$

Opción *b*) si $\lambda = 1$
(se demuestra facilmente que las condiciones de producto escalar se verifican).

BH

Prod_esc $(u, v) := u\ [1, 1; 1, 4]\ v'$
Prod_esc $([a, b], [a, b])$
=

#32: $\text{Prod\_esc}\ (u, v) := u \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \cdot 1 \end{bmatrix} \cdot v'$

#33: Prod_esc $([a, b], [a, b])$

#34: $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b^2$

que es siempre positivo, para a y b reales.

Ejercicio 4

Calcúlese el producto escalar de (1, 2, 1) y (1, 2, 1):

BH

[1, 2, 1] [3, 1, 1; 1, 1, 0; 1, 0, 1] [1; 2; 1]
=

#35: $[1, 2, 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

#36: [14]

Ejercicio 5

Defínase el producto escalar dado como una operación:

BH

Produc_esc $(u, v) :=$ INT $(u \cdot v, x, -1, 1)$

#37: $\text{Produc\_esc}\ (u, v) := \int_{-1}^{1} u \cdot v\ dx$

Comprobar cuánto vale cada producto escalar:

BH

$u := 2x + 3$
Produc_esc $(u, 3x + 2)$

=
Produc_esc (u, $9x + 2$)
=
Produc_esc (u, $2x + 3$)
=

#38: $u := 2 \cdot x + 3$

#39: Produc_esc (u, $3 \cdot x + 2$)

#40: -8

#41: Produc_esc (u, $9 \cdot x + 2$)

#42: 0

#43: Produc_esc (u, $2 \cdot x + 3$)

#44: $-\frac{46}{3}$

Ejercicio 6

Defínase el producto escalar:

BH

Pr_esc (p, q) := INT ($p \cdot q$, x, -1, 1)

Calcular la matriz que define el producto escalar:

BH

Pr_esc (1, 1)
=
Pr_esc (x, x)
=
Pr_esc (x^2, x^2)
=
Pr_esc (1, x)
=
Pr_esc (1, x^2)
=
Pr_esc (x, x^2)

=

#45: $\text{Pr\_esc}(p, q) := \int_{-1}^{1} p \cdot q \, dx$

#46: Pr_esc (1, 1)

#47: 2

#48: Pr_esc (x, x)

#49: $\frac{2}{3}$

#50: Pr_esc (x^2, x^2)

#51: $\frac{2}{5}$

#52: Pr_esc (1, x)

#53: 0

#54: Pr_esc (1, x^2)

#55: $\frac{2}{3}$

#56: Pr_esc (x, x^2)

#57: 0

Opción *c*) Calcular la norma $x^2 - 1$.

BH

$\sqrt{}$ (Pr_esc (x^2 – 1, x^2 – 1))

=

#58: $\sqrt{}$ (Pr_esc (x^2 – 1, x^2 – 1))

#59: $\frac{4 \cdot \sqrt{15}}{15}$

CAPÍTULO 6

DIAGONALIZACIÓN

6.2. Valores propios y vectores propios

6.2.4. *Definición de ecuación característica de una matriz*

El polinomio característico de una matriz A, cuadrada de orden n, se calcula con el operador "CHARPOLY (A)".

Por defecto es un polinomio en w. Para seguir la notación del libro se usará: "CHARPOLY (A, λ)".

Cálculo de la ecuación característica:

Método 1

Mediante ecuación característica:

BH

$$\text{CHARPOLY}(A, \lambda) = 0$$

Método 2

Mediante ecuación matricial:

BH

$$\text{DET}(A - \lambda\ \text{IDENTITY\_MATRIX}(n)) = 0$$

Ejemplo 6.2.2

Se define A.
Por el método 1:
Se calcula la ecuación característica

BH

$A := [3, -1, 0;\ -1, 2, -1;\ 0, -1, 3]$
CHARPOLY $(A, \lambda) = 0$
=

#1: $$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

#2: CHARPOLY $(A, \lambda) = 0$

#3: $$-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 19 \cdot \lambda + 12 = 0$$

Por el método 2:

BH

DET $(A - \lambda$ IDENTITY_MATRIX $(3)) = 0$

#4: DET $(A - \lambda \cdot$ IDENTITY_MATRIX $(3)) = 0$

#5: $$-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 19 \cdot \lambda + 12 = 0$$

Se factoriza la expresión:

BH

Simplificar > *Factorizar (variable,* λ*, Racional)* > *Factorizar*

#6: $$(1 - \lambda) \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 4) = 0$$

Cálculo de valores propios:

Obtenida la ecuación característica, se resuelve en λ:

Método 1

Se ilumina la ecuación característica:

BH

Resolver > Expresión (variable, λ, Algebraico, Real) > Resolver

#7: SOLVE $(-\lambda^3 + 8 \cdot \lambda^2 - 19 \cdot \lambda + 12 = 0, \lambda, \text{Real})$

#8: $\lambda = 4 \vee \lambda = 3 \vee \lambda = 1$

Método 2

Con el operador "EIGENVALUES (*A*, λ)", o bien con "EIGENVALUES (*A*)".

BH

EIGENVALUES (*A*, λ)
=

#9: EIGENVALUES (*A*, λ)

#10: $[\lambda = 1, \lambda = 3, \lambda = 4]$

Cálculo de vectores propios a asociados a cada valor propio:

Se escribe la ecuación matricial (*A* – λ IDENTITY_MATRIX (3)) [*x*; *y*; *z*] = [0; 0; 0] y se sustituye en ella cada valor propio:

Método 1

BH

(*A* – λ IDENTITY_MATRIX (3)) [*x*; *y*; *z*] = [0; 0; 0]
=

#11: $\left(A - \lambda \cdot \text{IDENTITY\_MATRIX}\ (3)\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

#12:
$$\begin{bmatrix} x \cdot (3 - \lambda) - y = 0 \\ -x + y \cdot (2 - \lambda) - z = 0 \\ z \cdot (3 - \lambda) - y = 0 \end{bmatrix}$$

Se sustituye el primer valor propio, $\lambda = 1$, y se resuelve:
Iluminado el sistema anterior:

BH

Simplificar > *Sustituir variable*, $(\lambda = 1)$
> *Simplificar*
Resolver > *Expresión* > *(Variables. x, y, z)*
> *Resolver*

#13:
$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x - y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2 \cdot z \cdot - y = 0 \end{bmatrix}$$

#14:
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2 \cdot x - y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2 \cdot z \cdot - y = 0 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$$

#15:
$$[x - z = 0 \wedge y - 2 \cdot z = 0]$$

Se repite el proceso anterior con $\lambda = 3$:
Se ilumina el sistema en λ:

BH

Simplificar > *Sustituir variable*, $(\lambda = 3)$
> *Simplificar*

#16:
$$\begin{bmatrix} -y = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -y = 0 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es inmediata.

#17:
$$[x = -z \wedge y = 0]$$

Con $\lambda = 4$
Se razona de forma análoga: sustituir y resolver

#18:
$$\begin{bmatrix} -x - y = 0 \\ -\lambda - 2 \cdot y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{bmatrix}$$

#19: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} -x-y=0 \\ -x-2\cdot y-z=0 \\ -y-z=0 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$

#20: $[x-z=0 \wedge y+z=0]$

Método 2

Obtener el subespacio asociado al valor propio mediante el operador "EXACT_EIGENVECTOR (A, λ)", donde A es la matriz y λ es el valor propio.

En el ejercicio 6.2.2

Uno a uno se calculan los subespacios asociados a los valores propios, $\lambda=1$, $\lambda=3$ y $\lambda=4$:

BH

EXACT_EIGENVECTOR (A, 1)
=
EXACT_EIGENVECTOR (A, 3)
=
EXACT_EIGENVECTOR (A, 4)
=

#21: EXACT_EIGENVECTOR (A, 1)

#22: [[@1, 2 · @1, @1]]

#23: EXACT_EIGENVECTOR (A, 3)

#24: [[@2, 0, −@2]]

#25: EXACT_EIGENVECTOR (A, 4)

#26: [[@3, −@3, @3]]

Cada subespacio es de dimensión 1, porque en la solución aparece únicamente un parámetro.

Observaciones

— El operador "EXACT_EIGENVECTOR (A, λ)" es para matrices A de orden menor o igual que 4.
— Como ya se ha explicado, @n, representa un parámetro. Por lo tanto el número de parámetros distintos que aparece en las ecuaciones es la dimensión del subespacio asociado a ese valor propio.

Ejemplo 6.2.3

Defínase A y calcúlese su ecuación característica.

BH

$A := [0, 1, 0; -4, 4, 0; -2, 1, 2]$
CHARPOLY $(A, \lambda) = 0$
=

#27: $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

#28: CHARPOLY $(A, \lambda) = 0$

#29: $(2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 4 \cdot \lambda + 4) = 0$

Factorizar:

BH

Simplificar > *Factorizar (variable,* λ*, Racional)* > *Factorizar*

#30: $(2 - \lambda)^3 = 0$

Ejemplo 6.2.5

Calcúlese el espacio asociado al valor propio $\lambda = 2$, de multiplicidad 3, correspondiente a la matriz A, del ejercicio 6.3.3:

BH

EXACT_EIGENVECTOR $(A, 2)$
=

#31: EXACT_EIGENVECTOR $(A, 2)$

#32: $[[@5, 2 \cdot @5, @4]]$

6.3. Diagonalización de matrices

6.3.1. Condición suficiente de diagonalización

Si existen n raíces distintas de la ecuación característica de una matriz de orden n, entonces la matriz se puede diagonalizar.

Ejemplo 6.3.1

Defínase la matriz A del ejercicio 6.2.2 y la matriz de paso P.

BH

$A := [3, -1, 0;\ -1, 2, -1;\ 0, -1, 3]$
$P := [1, 1, 1;\ 2, 0, -1;\ 1, -1, 1]$

#33:
$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

#34:
$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular $P^{-1}\,AP$ y comprobar que es la matriz diagonal Λ.

BH

$P\text{^} - 1\ AP$
$=$

#35: $P^{-1} \cdot A \cdot P$

#36:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto $A = P\,\Lambda\,P^{-1}$.

Después de calcular los valores propios y tomar una base en cada uno de los subespacios asociados, se calcula la matriz de cambio de base o de paso, P.

Se comprueba que la matriz P calculada diagonaliza a la matriz A.

6.3.4. Teorema

Un endomorfismo es diagonalizable si y sólo si la dimensión del subespacio vectorial asociado a cada valor propio coincide con la multiplicidad algebraica.

Para comprobar si se cumple esta condición bastará con calcular el rango de $(A - \lambda I)$ y a continuación calcular los valores propios $\lambda \downarrow i$ y su multiplicidad.

Ejemplo 6.3.2

Defínase la matriz A del ejemplo 6.2.3, calcúlese el rango de $(A\text{-}2\mathrm{I})$

BH

$A := [0, 1, 0;\ -4, 4, 0;\ -2, 1, 2]$
RANK $(A - 2$ IDENTITY_MATRIX $(3))$
=

#37:
$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

#38: RANK $(A - 2 \cdot$ IDENTITY_MATRIX $(3))$

#39: 1

6.4. Diagonalización de endomorfismos simétricos

Dada una matriz simétrica A, existe una matriz P ortogonal tal que $P'AP$ es una matriz diagonal.

Ejemplo 6.4.1

Defínase la matriz A y compruébese que es simétrica, es decir $A = A'$:

BH

$A := [2, 0, 1;\ 0, 3, 0;\ 1, 0, 2]$
IDENTICAL? (A, A')
=

#40: $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

#41: IDENTICAL? (A, A')

#42: true

Calcular la ecuación característica

BH

CHARPOLY $(A, \lambda) = 0$
=

#43: CHARPOLY $(A, \lambda) = 0$

#44: $-\lambda^3 + 7 \cdot \lambda^2 - 15 \cdot \lambda + 9 = 0$

Calcular los valores propios y la multiplicidad algebraica, factorizando la ecuación característica.
(Iluminada la ecuación):

BH

Simplificar > Factorizar (variable, λ, Racional)
> Factorizar

#45: $(1 - \lambda) \cdot (\lambda - 3)^2 = 0$

Los subespacios asociados a cada valor propio:

BH

L SUB 1 : = EXACT_EIGENVECTOR $(A, 3)$
=
L SUB 2 : = EXACT_EIGENVECTOR $(A, 1)$
=

#46: 1_1 : = EXACT_EIGENVECTOR $(A, 3)$

#47: [[@7, @6, @7]]

Como el número de parámetros que aparece es dos, el subespacio es de dimensión 2, y por tanto coincide con su multiplicidad algebraica.

#48: $l_2 := \text{EXACT\_EIGENVECTOR}(A, 1)$

#49: $[[@8, 0, -@8]]$

Es un subespacio de dimensión 1.

Se eligen los vectores $v \downarrow 1 := (1, 0, 1)$ y $v \downarrow 2 := (0, 1, 0)$ del primer subespacio $1 \downarrow 1$, y $v \downarrow 3 := (1, 0, -1)$ de $1 \downarrow 2$:
Para simplificar la notación se define v_1, v_2, v_3 en lugar de $v \downarrow 1$, $v \downarrow 2$, $v \downarrow 3$:

BH

```
v_1 := [1, 0, 1]
v_2 := [0, 1, 0]
v_3 := [1, 0, -1]
```

#50: $v\_1 := [1, 0, 1]$

#51: $v\_2 := [0, 1, 0]$

#52: $v\_3 := [1, 0, -1]$

Calcular su módulos:

BH

```
ABS (v_1)
=
ABS (v_2)
=
ABS (v_3)
=
```

#53: $|v\_1|$

#54: $\sqrt{2}$

#55: $|v\_2|$

#56: 1

#57: $|v\_3|$

#58: $\sqrt{2}$

Comprobar que efectivamente son vectores ortogonales entre sí:

BH

$v\_1 \cdot v\_2$
=
$v\_1 \cdot v\_3$
=
$v\_2 \cdot v\_3$
=

#59: $v\_1 \cdot v\_2$

#60: 0

#61: $v\_1 \cdot v\_3$

#62: 0

#63: $v\_2 \cdot v\_3$

#64: 0

Por tanto, los tres vectores ortonormales que forman una base son:

BH

$u\_1 := v\_1/\text{ABS}\ (v\_1)$
=
$u\_2 := v\_2/\text{ABS}\ (v\_2)$
=
$u\_3 := v\_3/\text{ABS}\ (v\_3)$
=

#65: $u\_1 := \dfrac{v\_1}{|v\_1|}$

#66: $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

#67: $u\_2 := \dfrac{v\_2}{|v\_2|}$

#68: [0, 1, 0]

#69: $u\_3 := \dfrac{v\_3}{|v\_3|}$

#70:
$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Definir C, la matriz que tiene por columnas los vectores u_1, u_2, u_3:

BH

$C := [u\_1;\ u\_2;\ u\_3]'$
=

#71: $C := [u\_1; u\_2; u\_3]'$

#72:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Como se observa, $C = C'$, es decir es simétrica.
Además C es ortogonal porque $C' = C^{-1}$, en efecto;

BH

IDENTICAL? $(C' = C^{-1})$
=

#73: IDENTICAL? $(C' = C^{-1})$

#74: true

Para terminar, se calcula $C'\,AC$:

BH

$C'\,AC$
=

#75: $C'\,A \cdot C$

#76:
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

a) Una matriz M, tiene por filas: (0, 1, –1), (1, 2, –1), (–1, –1, 2). Dígase si es diagonalizable, y si lo es, defínase el tipo de matrices que la diagonalizan.

b) Dada la matriz A, cuyas filas son: (1, 0, 0), (0, cos x, sen x), (0, –sen$x$, cos$x$) aplíquese la definición dada en el apartado *a*) para comprobar si esta matriz es ortogonal o no.

c) Determínese si la matriz A, dada en el apartado *b*), diagonaliza a la matriz M, dada en el apartado *a*), para algún valor de x y si es posible, determínese dicho valor.

Solución:

a) Una matriz M, simétrica, es diagonizable mediante una matriz A ortogonal; A es ortogonal $\Leftrightarrow$ Sus columnas forman un sistema ortonormal de vectores $\Leftrightarrow A^t = A^{-1}$.

b) Con cualquiera de las dos definiciones es evidente que la matriz dada es ortogonal.

c) La matriz producto $A^{-1}MA$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos x + \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x - \cos x \\ \cos x + \operatorname{sen} x & 2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 & 1 - 2\cos^2 x \\ -\cos x + \operatorname{sen} x & 1 - 2\cos^2 x & 2 - 2 \operatorname{sen} x \cos x \end{pmatrix}$$

para que sea diagonal, $\cos x + \operatorname{sen} x = -\cos x + \operatorname{sen} x = 1 - 2\cos^2 x = 0$, como no hay valor de x que haga compatibles las 3 condiciones $\Rightarrow$ No hay ningún valor de x que haga que la matriz A diagonalice M.

Ejercicio 2

Determínese para que valores de a es diagonalizable la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ es raíz doble, y $\lambda = 2$ es raíz simple. El subespacio asociado a $\lambda = 1$ tiene por ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ax_1 = 0;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$

si $a \neq 0$ la dimensión del subespacio es 1, si $a = 0$, la dimensión del subespacio es 2; para que se pueda diagonalizar a debe ser igual a 0.

Ejercicio 3

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determínese si (1, 0, 1) es vector propio de A, y si lo es, ¿a qué valor propio corresponde?

Solución:

Sí lo es porque $\exists\ \lambda$ tal que $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2$.

Ejercicio 4

¿Qué valores puede tener x para que $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 x + \lambda$, pueda ser el polinomio característico de una matriz simétrica?

Solución:

A es simétrica $\Rightarrow$ sus autovalores son reales; $\lambda^3 - 3\lambda^2 x + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 3\lambda x + \lambda) = 0$ debe tener raíces reales $\Rightarrow 9x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 2/3$.

Ejercicio 5

De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable:

a) Si $a \neq 0$.
b) Si $a = 0$.
c) No es diagonalizable para ningún valor real de a.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ es raíz doble, } \lambda_2 = 2 \text{ simple;}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}; \begin{cases} Si\ a = 0,\ \dim(L_1) = 2 \\ Si\ a \neq 0,\ \dim(L_1) = 1 \end{cases};$$

La matriz sólo será diagonalizable si $a = 0$. Es *cierta b*).

Ejercicio 6

a) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Escríbanse las condiciones que deberían cumplirse para que A y B fueran semejantes.

b) Si las matrices A y B del apartado *a*) son semejantes, escríbase la matriz de paso, y si no lo son, dígase porqué.

c) ¿Es diagonalizable la matriz B? Justifíquese la respuesta.

Solución:

a) Debería existir una matriz P, regular, tal que $A = PBP^{-1}$.

b) Si son semejantes, $\exists\ P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que verifica $AP = PB$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2a = a + b;\ 2b = a;\ -c = c + d;\ -d = c \Rightarrow a = b = c = d = 0$$

y la matriz P no sería regular $\Rightarrow$ No son semejantes.

c) Los autovalores de B son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \pm \sqrt{5}/2$$

son dos autovalores reales y distintos de una matriz de orden dos $\Rightarrow$ la matriz es diagonalizable.

Ejercicio 7

A es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. De entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen:

a) El $\overline{0}$ es autovector de A.
b) Si A tiene 3 autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow |A| = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$.
c) Si A es simétrica $\Rightarrow$ Existe una matriz diagonal semejante.

Solución:

a) Falsa por definición.
b) *Correcta,* si A y B son semejantes $\Rightarrow |A| = |B| = |P\,AP^{-1}|$.
c) *Correcta,* las matrices simétricas son siempre diagonalizables.

Ejercicio 8

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, el subespacio de los vectores propios de valor propio 6, asociado a la matriz es:

a) $x - 2y + z = 0$.
b) $(2, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$.
c) No tiene porque no es diagonalizable.

Solución:

La *solución es a*)

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (7-\lambda)^2\,(10-\lambda) + 8 - (10-\lambda) - 8\,(7-\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6,\ \lambda = 6,\ \lambda = 12$$

Calculemos el subespacio de los vectores de valor propio 6;

$$\begin{pmatrix} 7-6 & -2 & 1 \\ -2 & 10-6 & -2 \\ 1 & -2 & 7-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ luego resulta el plano $x - 2y + z = 0$.

La *b*) es falsa porque los vectores $(2, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$ están en el plano pero no son todos los vectores de dicho subespacio.

La *c*) también es falsa, porque es diagonalizable.

Ejercicio 9

Dada la matriz $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. De entre las siguientes afirmaciones, elíjase la correcta:

el subespacio de los vectores propios asociados al autovalor 2 es:

a) $\langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.
b) $\langle (1, -1, 0) \rangle$.
c) Ninguna de las anteriores es cierta.

Solución:

La *solución es a*).

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \lambda = 2, \lambda = -1$$

Calculemos el subespacio asociado al valor propio 2:

$$\begin{pmatrix} -4-2 & -6 & 0 \\ 3 & 5-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{plano } x + y = 0, \text{ es decir, el subespacio}$$

$\langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

Editar las matrices M y A, por filas:

BH

$M := [0, 1, -1;\ 1, 2, -1;\ -1, -1, 2]$
$A := [1, 0, 0;\ 0, \text{COS}x, \text{SIN}x;\ 0. -\text{SIN}x, \text{COS}x]$

#1:
$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

#2: $$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{COS}(x) & \text{SIN}(x) \\ 0 & -\text{SIN}(x) & \text{COS}(x) \end{bmatrix}$$

Se comprueba si A es ortogonal, es decir, si $A' = A\text{^} - 1$:

Método 1

Se calcula término a término y se comprueba que ambos coinciden.

BH

A'
=
A^{-1}
=

#3: A'

#4: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{COS}(x) & -\text{SIN}(x) \\ 0 & \text{SIN}(x) & \text{COS}(x) \end{bmatrix}$$

#5: A^{-1}

#6: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{COS}(x) & -\text{SIN}(x) \\ 0 & \text{SIN}(x) & \text{COS}(x) \end{bmatrix}$$

Método 2

Usando el comando "IDENTICAL? (,)":

BH

IDENTICAL? (A^{-1}, A')
=

#7: IDENTICAL? (A^{-1}, A')

#8: true

c) Se comprueba si A diagonaliza a M:

BH

$A\text{^} - 1\ MA$
$=$

#9: $A^{-1} \cdot M \cdot A$

#10:
$$\begin{bmatrix} 0 & \text{COS}(x) + \text{SIN}(x) & \text{SIN}(x) - \text{COS}(x) \\ \text{COS}(x) + \text{SIN}(x) & 2 \cdot \text{SIN}(x) \cdot \text{COS}(x) + 2 & 1 - 2 \cdot \text{COS}(x)^2 \\ \text{SIN}(x) - \text{COS}(x) & 1 - 2 \cdot \text{COS}(x)^2 & 2 - 2 \cdot \text{SIN}(x) \cdot \text{COS}(x) \end{bmatrix}$$

Para que sea diagonal el sistema siguiente debe tener solución.

BH

Resolver > *Sistema* (3 *ecuaciones*)
Cos x + Sin x $= 0$
–Cos x + Sin $x = 0$
1 – 2 Cos x $= 0$
(variable x) > *Resolver*

#11: SOLVE ([COS (x) + SIN $(x) = 0$, – COS (x) + SIN $(x) = 0$, $1 - 2 \cdot \text{COS}(x) = 0$], [x])

#12: [ ]

No tiene solución.

Ejercicio 2

Definir la matriz:

BH

$M := [1, 0, 0;\ a, 1, 0;\ 1, 1, 2]$

#13:
$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular los autovalores:

BH

EIGENVALUES (*M*)
=

#14: EIGENVALUES (*M*)

#15: [1, 2]

Como la matriz es triangular, la raíz 1 es doble.
Calcular el subespacio asociado el autovalor 1:

BH

(*M* – IDENTITY_MATRIX (3)) [*x*; *y*; *z*] = [0; 0; 0]
=

#16: $(M - \text{IDENTITY\_MATRIX}(3)) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

#17: $\begin{bmatrix} 0 = 0 \\ a \cdot x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{bmatrix}$

Si $a = 0$, dim $L_2 = 1$, en efecto:

BH

(*M* – 2IDENTITY_MATRIX (3)) [*x*; *y*; *z*] = [0; 0; 0]
=
Simplificar > *Sustituir variable* ($a = 0$) > *Sí*

#18: $M - 2 \cdot \text{IDENTITY\_MATRIX}(3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

#19: $\begin{bmatrix} -x = 0 \\ ax - y = 0 \\ x + y = 0 \end{bmatrix}$

#20: $\begin{bmatrix} -x = 0 \\ 0 \cdot x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{bmatrix}$

Otra forma de calcular el espacio de autovectores de autovalor 2:

BH

EXACT_EIGENVECTOR ([1, 0, 0; 0, 1, 0; 1, 1, 2], 2)
=

#21: $\text{EXACT\_EIGENVECTOR}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, 2\right)$

#22: [[0, 0, @1]]

Ejercicio 3

Definir la matriz A, y la matriz identidad:

BH

$A := [3, 2, -1;\ -1, 0, 1;\ -1, -2, 3]$
$I := [1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1]$

#23: $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

#24: $I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se resuelve el sistema en λ:

BH

$(A - \lambda I)\ [1; 0; 1] = [0; 0; 0]$
=
Resolver > Expresión > (variable λ, Algebraico, Real) > Resolver

#25: $(A - \lambda \cdot I) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

#26:
$$\begin{bmatrix} 2-\lambda=0 \\ 0=0 \\ 2-\lambda=0 \end{bmatrix}$$

#27:
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda=0 \\ 0=0 \\ 2-\lambda=0 \end{bmatrix}, \lambda, \text{Real}\right)$$

#28:
$$[\lambda = 2]$$

Ejercicio 4

Factorizar el polinomio en la variable λ:

BH

$\lambda\text{^}3 - 3\lambda\text{^}2\, x + \lambda$
Simplificar > *Factorizar* (*Variable* λ, *Radicales*) > *Factorizar*

#29:
$$\lambda^3 - 3 \cdot \lambda^2 \cdot x + \lambda$$

#30:
$$\lambda \cdot \left(\lambda - \frac{\sqrt{(9 \cdot x^2 - 4)} + 3 \cdot x}{2}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{\sqrt{(9 \cdot x^2 - 4)} - 3 \cdot x}{2}\right)$$

Se puede seguir resolviendo. En el último resultado se selecciona con el cursor la expresión $\sqrt{(9 \cdot x^2 - 4)}$:

BH

$F3 \geq 0$
Resolver > *Expresión* (*variable x, Algebraico, Real*)
> *Resolver*

#31:
$$\sqrt{(9 \cdot x^2 - 4)} \geq 0$$

#32:
$$\text{SOLVE}\left(\sqrt{(9 \cdot x^2 - 4)} \geq 0, x, \text{Real}\right)$$

#33:
$$x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq \frac{2}{3}$$

Ejercicio 5

Calcular el polinomio característico, para estudiar multiplicidades de sus raíces:

BH

DET ([1 − λ, 0, 0; a, 1 − λ, 0; 1, 1, 2 − λ])
=

#34: $\text{DET}\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

#35: $(2-\lambda)\cdot(\lambda-1)^2$

Calcular el espacio asociado al valor propio 1:

BH

[0, 0, 0; a, 0, 0; 1, 1, 1] [x; y; z] = [0; 0; 0]
=

#36: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

#37: $\begin{bmatrix} 0=0 \\ a\cdot x=0 \\ x+y+z=0 \end{bmatrix}$

Es decir, la matriz dada sólo es diagonalizable si $a = 0$.

Ejercicio 6

Si se supone que las matrices A y B son semejantes, entonces existe una matriz P tal que:

BH

A := [2, 0; 0, −1]
B := [1, 1; 1, 0]
P := [x, y; z, t]
AP = PB
=

#38: $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

#39: $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

#40: $P := \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

#41: $A \cdot P = P \cdot B$

#42:
$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x = x + y & 2 \cdot y = x \\ -z = z + t & -t = z \end{bmatrix}$$

Calcular las soluciones:

BH

Resolver > *Expresión*
(*Variables x, y, z, t, Algebraico, Real*)
> *Resolver*

#43: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} 2 \cdot x = x + y & 2 \cdot y = x \\ -z = z + t & -t = z \end{bmatrix}, [x, y, z, t], \text{Real}\right)$

#44: $[x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge t = 0]$

BH

EIGENVALUES (*B*)
=

#45: EIGENVALUES (*B*)

#46: $\left[\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

Ejercicio 7

La opción *b)* es cierta.
Demostración:

BH

DET ([α, 0, 0; 0, β, 0; 0, 0, δ])
=

#47: $$\text{DET}\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \delta\end{bmatrix}$$

#48: $$\alpha\cdot\beta\cdot\delta$$

Ejercicio 8

Calcular el polinomio característico:

BH

CHARPOLY ([7, –2, 1; –2, 10, –2; 1, –2, 7], v])
Simplificar > Normal

Hallar los valores propios:

BH

EIGENVALUES ([7, –2, 1; –2, 10, –2; 1, –2, 7], v])
Simplificar > Normal

#49: $$\text{CHARPOLY}\left(\begin{bmatrix}7 & -2 & 1\\ -2 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}, v\right)$$

#50: $$-v^3+24\cdot v^2-180\cdot v+432$$

#51: $$\text{EIGENVALUES}\left(\begin{bmatrix}7 & -2 & 1\\ -2 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}, v\right)$$

#52: $$[v=6,\ v=12]$$

Se edita el sistema:

BH

[7 – 6, –2, 1; –2, 10 – 6, –2; 1, –2, 7 – 6] [x; y; z] = [0; 0; 0]
Simplificar > Normal

y se resuelve:

BH

Resolver > Expresión (variables, x, y, z, Algebraico, Real) > Resolver

#53:
$$\begin{bmatrix} 7-6 & -2 & 1 \\ -2 & 10-6 & -2 \\ 1 & -2 & 7-6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#54:
$$\begin{bmatrix} x - 2 \cdot y + z = 0 \\ -2 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot z = 0 \\ x - 2 \cdot y + z = 0 \end{bmatrix}$$

#55:
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} x - 2 \cdot y + z = 0 \\ -2 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot z = 0 \\ x - 2 \cdot y + z = 0 \end{bmatrix}, [x, y, z]\right)$$

#56:
$$[x - 2 \cdot y + z = 0]$$

La opción *a*) cierta.

Ejercicio 9

Calcular el polinomio característico:

BH

CHARPOLY ([–4, –6, 0; 3, 5, 0; 0, 0, 2], *v*)
Simplificar > Normal

Hallar los valores propios:

BH

EIGENVALUES ([–4, –6, 0; 3, 5, 0; 0, 0, 2], *v*)
Simplificar > Normal

#57:
$$\text{CHARPOLY}\left(\begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, v\right)$$

#58:
$$(2 - v) \cdot (v^2 - v - 2)$$

#59:
$$\text{EIGENVALUES}\left(\begin{bmatrix}-4 & -6 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, v\right)$$

#60:
$$[v=-1,\ v=2]$$

Se editar el sistema:

BH

$[-4-2, -6, 0;\ 3, 5-2, 0;\ 0, 0, 2-2]\ [x;\ y;\ z] = [0;\ 0;\ 0]$
Simplificar > Normal

y se resuelve:

BH

Resolver > Expresión (variables > x, y, Algebraico, Real) > Resolver

#61:
$$\begin{bmatrix}-4-2 & -6 & 0\\ 3 & 5-2 & 0\\ 0 & 0 & 2-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

#62:
$$\begin{bmatrix}-6\cdot x-6\cdot y=0\\ 3\cdot x+3\cdot y=0\\ 0=0\end{bmatrix}$$

#63:
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix}-6\cdot x-6\cdot y=0\\ 3\cdot x+3\cdot y=0\\ 0=0\end{bmatrix}, [x, y], \text{Real}\right)$$

#64:
$$[x+y=0]$$

Es decir, es el subespacio $<(1,-1,0),(0,0,1)>$, de dimensión dos.

CAPÍTULO 7

FORMAS BILINEALES, FORMAS CUADRÁTICAS

7.1. Formas bilineales

Como ya se ha comentado en el caso de las aplicaciones lineales DERIVE no es un programa suficientemente ágil, pero es posible utilizarlo, para ello seguiremos los siguientes pasos:

— Definir la función, con variables, vectores: $f(u, v) :=$
— Comprobar que es lineal por la derecha:

$$f(x, y + w)$$
$$f(x, y) + f(x, w)$$

$$f(\lambda x, y)$$
$$\lambda f(x, y)$$

— Comprobar que es lineal por la izquierda (idem).

Como hay que trabajar con las componentes del vector, las notaciones se complican considerablemente y los pasos no se ven tan claros.

Además, no se debe olvidar que DERIVE es un programa simbólico y es más efectivo para cómputos que para razonamientos y comprobación de axiomas.

Cálculo de la matriz asociada a una forma cuádrica

Una vez, calculada la matriz, se comprueba que efectivamente corresponde a la forma cuadrática dada.

Ejemplo 7.1.1

Definir las variables:

BH

Definir > Dominio de variable (nombre, x, Vector) > Sí
Definir > Dominio de variable (nombre, y, Vector) > Sí
Definir > Dominio de variable (nombre, w, Vector) > Sí
Definir > Dominio de variable (nombre, λ, Real, Todos) > Sí

#1: $x : \in$ Vector

#2: $y : \in$ Vector

#3: $w : \in$ Vector

#4: $\lambda : \in$ Real

Definir la función:

BH

$$f(x, y) := x \downarrow 1y \downarrow 2 + x \downarrow 2y \downarrow 3$$

#5: $f(x, y) := x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3$

Ver si es lineal por la derecha:

BH

$f(x + w, y)$
$=$
$f(x, y) + f(w, y)$
$=$

#6: $f(x + w, y)$

#7: $(x + w)_2 \cdot y_3 + (x + w)_1 \cdot y_2$

#8: $f(x, y) + f(w, y)$

#9: $x_2 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 + w_2 \cdot y_3 + w_1 \cdot x_2$

La expresión anterior ya no se puede simplificar más mediante DERIVE.

$f(\lambda x, y)$
=
$\lambda f(x, y)$
=

#10: $f(\lambda \cdot x, y)$

#11: $(\lambda \cdot x)_2 \cdot y_3 + (\lambda \cdot x)_1 \cdot y_2$

#12: $\lambda \cdot f(x, y)$

#13: $\lambda \cdot (x_2 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2)$

Por tanto es lineal por la derecha; por la izquierda se haría de la misma forma. Luego es una forma bilineal.

Matriz asociada a una forma cuadrática

Una vez definida la forma cuadrática se calcula cada $f(e \downarrow i, e \downarrow j)$ para hallar la matriz asociada.

Ejemplo 7.1.2

Determinar la forma lineal usando las variables x, y, definidas anteriormente como vectores:

BH

$$f(x, y) := x \downarrow 1 y \downarrow 1 - 4x \downarrow 1 y \downarrow 2 + 6x \downarrow 2 y \downarrow 3 - x \downarrow 3 y \downarrow 1 - 3x \downarrow 3 y \downarrow 3$$

#14: $f(x, y) := x_1 \cdot y_1 - 4 \cdot x_1 \cdot y_2 + 6 \cdot x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_1 - 3 \cdot x_3 \cdot y_3$

Calcular las imágenes por f de los elementos de la base B, que determinan los coeficientes de la matriz buscada:

BH

$A := [f([1, 0, 0], [1, 0, 0]), f([1, 0, 0], [0, 1, 0]), f([1, 0, 0], [0, 0, 1]);$
$f([0, 1, 0], [1, 0, 0]), f([0, 1, 0], [0, 1, 0]), f([0, 1, 0], [0, 0, 1]);$
$f([0, 0, 1], [1, 0, 0]), f([0, 0, 1], [0, 1, 0]), f([0, 0, 1], [0, 0, 1])]$
=

#15:
$$A := \begin{bmatrix} f([1,0,0],[1,0,0]) & f([1,0,0],[0,1,0]) & f([1,0,0],[0,0,1]) \\ f([0,1,0],[1,0,0]) & f([0,1,0],[0,1,0]) & f([0,1,0],[0,0,1]) \\ f([0,0,1],[1,0,0]) & f([0,0,1],[0,1,0]) & f([0,0,1],[0,0,1]) \end{bmatrix}$$

#16:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7.1.3

Definir A

BH

$A := [1, 1;\ 1, 2]$

Calcular P:

BH

$[0, 1] = \alpha\,[1, 0] + \beta\,[1, 1] \wedge [1, 2] = \delta\,[1, 0] + \gamma[1, 1]$
Resolver > Expresión (variables, α, β, δ, γ, Algebraico, Real)
> Resolver

#17: $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

#18: $[0, 1] = \alpha \cdot [1, 0] + \beta \cdot [1, 1] \wedge [1, 2] = \delta \cdot [1, 0] + \gamma \cdot [1, 1]$

#19: SOLVE ($[0, 1] = \alpha \cdot [1, 0] + \beta \cdot [1, 1] \wedge [1, 2] = \delta \cdot [1, 0] + \gamma \cdot [1, 1]$, $[\alpha, \beta, \delta, \gamma]$, Real)

#20: $[\alpha = -1 \wedge \beta = 1 \wedge \delta = -1 \wedge \gamma = 2]$

Por tanto P es:

BH

$P := [-1, -1;\ 1, 2]$
=

#21: $P := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

#22:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular A'

BH

$P'AP$
=

#23: $P' \cdot A \cdot P$

#24:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

7.2. Formas cuadráticas

La forma cuadrática Q, se calcula a partir de la forma bilineal f, utilizando la definición $Q(x) = f(x, x)$:

Ejemplo 7.2.1

Definir la forma bilineal f:

BH

$f(x, y) := x \downarrow 1y \downarrow 1 - x \downarrow 1y \downarrow 2 - x \downarrow 2y \downarrow 1 + 2x \downarrow 1y \downarrow 3 + 2x \downarrow 3y \downarrow 1 + x \downarrow$
$\downarrow 2y \downarrow 2 - 3x \downarrow 3y \downarrow 3 - 3x \downarrow 3y \downarrow 2 + 2x \downarrow 3y \downarrow 3$

#25: $f(x, y) := x_1 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + 2 \cdot x_1 \cdot y_3 + 2 \cdot x_3 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 - 3 \cdot x_2 \cdot y_3 -$
$3 \cdot x_3 \cdot y_2 + 2 \cdot x_3 \cdot y_3$

Calcular $Q(x) := f(x, x)$,

BH

$Q(x) := f(x, x)$
=

#26: $Q(x) := f(x, x)$

#27: $-3 \cdot (x_3 \cdot x_2) + 2 \cdot (x_3 \cdot x_1) - 3 \cdot (x_2 \cdot x_3) - x_2 \cdot x_1 + 2 \cdot (x_1 \cdot x_3) - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3^2 +$
$x_2^2 + x_1^2$

Calcula la matriz A, de la misma forma, con la base canónica.

BH

A : = [f([1, 0, 0], [1, 0, 0]), f([1, 0, 0], [0, 1, 0]), f([1, 0, 0], [0, 0, 1]);
f([0, 1, 0], [1, 0, 0]), f([0, 1, 0], [0, 1, 0]), f([0, 1, 0], [0, 0, 1]);
f([0, 0, 1], [1, 0, 0]), f([0, 0, 1], [0, 1, 0]), f([0, 0, 1], [0, 0, 1])]
=

#28:
$$A := \begin{bmatrix} f([1,0,0],[1,0,0]) & f([1,0,0],[0,1,0]) & f([1,0,0],[0,0,1]) \\ f([0,1,0],[1,0,0]) & f([0,1,0],[0,1,0]) & f([0,1,0],[0,0,1]) \\ f([0,0,1],[1,0,0]) & f([0,0,1],[0,1,0]) & f([0,0,1],[0,0,1]) \end{bmatrix}$$

#29:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

En este punto aparecen operadores como "RANK", "CHARPOLY", "DET", ya utilizados en capítulos anteriores.

Ejemplo 7.2.2

Definir A y calcular sus autovalores:

BH

A : = [1, –1; –1, 1]
CHARPOLY [A, λ]
=

#30:
$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

#31: CHARPOLY (A, λ)

#32: $\lambda^2 - 2 \cdot \lambda$

#33: $\lambda \cdot (\lambda - 2)$

Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

Sea V un espacio vectorial real, $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, una aplicación tal que,

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 - 4x_1 y_2 + 3x_2 y_2.$$

a) Justifíquese si la aplicación es forma bilineal o no.
b) Escríbase la expresión analítica de la forma cuadrática asociada.
c) Clasifíquese la forma cuadrática obtenida.

Solución:

a) Es bilineal porque es lineal en las dos variables:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}', \bar{y}) = (x_1y_1 - 4x_1y_2 + 3x_2y_2) + (x_1'y_1 - 4x_1'y_2 + 3x_2'y_2) = f(x + x', y) =$$
$$= (x_1 + x_1')\, y_1 - 4(x_1 + x_1')\, y_2 + 3(x_2 + x_2')\, y_2 = f(\bar{x} + \bar{x}', \bar{y})$$
$$f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{y}') = (x_1y_1 - 4x_1y_2 + 3x_2y_2) + (x_1y_1' - 4x_1y_2' + 3x_2y_2') =$$
$$= x_1(y_1 + y_1') - 4x_1(y_2 + y_2') + 3x_2(y_2 + y_2')\, y_2 = f(\bar{x}, \bar{y} + \bar{y}')$$
$$\lambda f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda(x_1y_1 - 4x_1y_2 + 3x_2y_2) = \lambda x_1y_1 - 4\lambda x_1y_2 + 3\lambda x_2y_2.$$

Es forma porque es una aplicación en $\mathbb{R}$, que es el cuerpo sobre el que está construido V.

b) Forma cuadrática asociada: $Q(\bar{x}) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

c) Ecuación característica: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{5}$.

Matriz diagonal equivalente: $\begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Forma cuadrática diagonal asociada: $(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Como hay autovalores positivos y negativos la forma cuadrática es indefinida

Ejercicio 2

Clasifíquese la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por: $q(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2xy$ cuando $a = -1$.

Solución:

Valores propios de la matriz cuando $a = -1$.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2;\ \lambda_3 = 0$$

dim (subespacio asociado a λ_1) = 2 = multiplicidad algebraica de λ_1
dim (subespacio asociado a λ_3) = 1 = multiplicidad algebraica de λ_3

$\Rightarrow$ La matriz es diagonalizable y la matriz diagonal asociada es: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Signatura es el par (p, m) donde p es el número de elementos positivos que posee la diagonal de la matriz diagonal asociada, y m el número de elementos negativos.
Signatura = (0, 2) si $a = -1$.
Semidef negativa: sig = $(0, r)$ y rg = $r < n$ $\quad a = -1$; $\quad \Rightarrow$ sig = (0, 2) y rg = $2 < 3$.

Ejercicio 3

Consideremos la aplicación de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2, \text{ siendo } \bar{v}_1 = (x_1, x_2),\ \bar{v}_2 = (y_1, y_2).$$

Se pide:

a) Demostrar si es forma bilineal o no.
b) Escribir la forma cuadrática diagonal asociada y justificar que se puede hacer.
c) Clasificar esta forma cuadrática.

Solución:

a) En el enunciado nos dicen que es aplicación, veamos que es bilineal.

$$f(\bar{v}_1 + \bar{v}_1', \bar{v}_2) = x_1y_1 + x_1'y_1 - x_1y_2 - x_1'y_2 - 3x_2y_1 - 3x_2'y_1 - 3x_2y_2 + 3x_2'y_2 = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$$
$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_1 + \bar{v}_2') = x_1y_1 + x_1y_1' - x_1y_2 - x_1y_2' - 3x_2y_1 - 3x_2y_1' - 3x_2y_2 + 3x_2y_2' = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$$
$$f(\lambda\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \lambda\bar{x}_1\bar{y}_1 - \lambda\bar{x}_1\bar{y}_2 - 3\lambda\bar{x}_2\bar{y}_1 + 3\lambda\bar{x}_2\bar{y}_2 = f(\bar{v}_1, \lambda\bar{v}_2)$$

Es forma porque la imagen de la aplicación es $\mathbb{R}$, que es el espacio sobre el que están definidos los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$.

b) Una expresión analítica de la forma cuadrática es:

$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, la misma forma cuadrática se obtiene si se emplea

como matriz asociada: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, que por ser simétrica es diagonalizable.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2-\sqrt{5}\,;\ \lambda_2 = 2+\sqrt{5}\,; \Rightarrow (x_1', x_2') \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

es la expresión diagonal de la forma cuadrática.

c) $\lambda_1 = 2-\sqrt{5} < 0,\ \lambda_2 = 2+\sqrt{5} > 0 \Rightarrow$ es una forma cuadrática indefinida.

Ejercicio 4

¿A qué intervalo debe pertenecer a, para que la forma cuadrática $Q(x, y) = 2x^2 + axy + 6y^2$ sea definida positiva?

Solución:

Matriz de la forma cuadrática: $\begin{pmatrix} 2 & a/2 \\ a/2 & 6 \end{pmatrix}$. Autovalores: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & a/2 \\ a/2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 + \dfrac{\sqrt{a^2+16}}{2} \\ \\ \lambda_2 = 4 - \dfrac{\sqrt{a^2+16}}{2} \end{cases}$$

; λ_1 es siempre positivo, para que lo sea λ_2 es necesario que

$$\frac{\sqrt{a^2+16}}{2} < 4 \Rightarrow |a| < 4\sqrt{3}.$$

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

Ejercicio 1

Se recomienda hacer el apartado *a*) en papel, ya que se trata de comprobar si es bilineal o no.

El apartado *b*) es inmediato a partir del *a*).

Se tratará del caso *c*).

Determinación de la ecuación característica:

BH

DET ([1 – λ, –2; –2, 3 – λ])
=
Simplificar > Factorizar > (Variable, λ, Irracional) > Factorizar

#1: $\text{DET}\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

#2: $\lambda^2 - 4 \cdot \lambda - 1$

#3: $(\lambda + \sqrt{5} - 2) \cdot (\lambda - \sqrt{5} - 2)$

Ejercicio 2

Cálculo de los valores propios:

BH

DET ([–1 – λ, 1, 0; 1, –1 – λ, 0; 0, 0, –2 – λ]) = 0
=
Simplificar > Factorizar (variable, λ, Racional) > Factorizar

#4: $\text{DET}\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

#5: $-\lambda^3 - 4 \cdot \lambda^2 - 4 \cdot \lambda = 0$

#6: $-\lambda \cdot (\lambda + 2)^2 = 0$

#7: SOLVE $(-\lambda \cdot (\lambda + 2)^2 = 0, \lambda, \text{Real})$

#8: $\lambda = -2 \vee \lambda = 0$

Los valores propios son $\lambda = -2$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda = 0$ con multiplicidad algebraica 1.

Calcular la dimensión de cada subespacio asociado:

BH

[–1 – λ, 1, 0; 1, –1 – λ, 0; 0, 0, –2 – λ] [x; y; z] = [0; 0; 0]

=

Con el valor propio $\lambda = 0$, sustituir y resolver:

BH

Simplificar > Sustituir (Variable ($\lambda = 0$)) > Simplificar
Resolver > Expresión (variables. x, y, z, Algebraico, Real) > Resolver

#9:
$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#10:
$$\begin{bmatrix} y - x \cdot (\lambda + 1) = 0 \\ x - y \cdot (\lambda + 1) = 0 \\ -z \cdot (\lambda + 2) = 0 \end{bmatrix}$$

#11:
$$\begin{bmatrix} y - x = 0 \\ x - y = 0 \\ -2 \cdot z = 0 \end{bmatrix}$$

#12:
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} y - x = 0 \\ x - y = 0 \\ -2 \cdot z = 0 \end{bmatrix}, [x, y, z], \text{Real}\right)$$

#13:
$$[x - y = 0 \wedge z = 0]$$

Se selecciona el sistema y se repite el procedimiento para $\lambda = -2$.

#14:
$$\begin{bmatrix} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}$$

#15:
$$\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{bmatrix}, [x, y], \text{Real}\right)$$

#16:
$$[x + y = 0]$$

Luego la matriz es diagonalizable y tiene como valores propios –2 y 0.

Esta conclusión permite clasificar la matriz.

Ejercicio 3

Por ser simétrica es diagonalizable y basta calcular sus autovalores.
Caso *b)* Se calcula la matriz diagonal asociada a [1, –2; –2, 3]

BH

DET ([1 – λ, –2; –2, 3 – λ] = 0)
=
Resolver > Expresión (variable λ, Algebraico, Real)
> Resolver

#17: $\text{SOLVE}\left(\begin{bmatrix} x+y=0 \\ x+y=0 \\ 0=0 \end{bmatrix}, [x, y], \text{Real}\right)$

#18: $[x+y=0]$

#19: $\text{DET}\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}=0$

#20: $\lambda^2-4\cdot\lambda-1=0$

#21: SOLVE ($\lambda^2-4\cdot\lambda-1=0, \lambda$, Real)

#22: $\lambda=2-\sqrt{5}\ \vee\ \lambda=\sqrt{5}+2$

Ejercicio 4

Calcúlense los autovalores de la forma cuadrática dada:

BH

CHARPOLY ([2, *a*/2; *a*/2, 6])
=
Resolver > Expresión
(Variable w, Algebraico, Real) > Resolver

#23: $\text{CHARPOLY}\begin{bmatrix} 2 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 6 \end{bmatrix}$

#24: $(w-2)\cdot(w-6)-\frac{a^2}{4}$

#25: $\text{SOLVE}\left((w-2)\cdot(w-6)-\frac{a^2}{4}, w, \text{Real}\right)$

#26: $w=\frac{8-\sqrt{(a^2+16)}}{2} \vee w=\frac{\sqrt{(a^2+16)}+8}{2}$

Luego debe verificarse:

BH

$(\sqrt{(a\text{^}2+16)})/2<4$

Resolver > Expresión
Variable, a, Algebraico, Real > Resolver

#27: $\frac{\sqrt{(a^2+16)}}{2}<4$

#28: $\text{SOLVE}\left(\frac{\sqrt{(a^2+16)}}{2}<4, a, \text{Real}\right)$

#29: $-4\cdot\sqrt{3}<a<4\cdot\sqrt{3}$

Es decir $|a|<4\sqrt{3}$.

CAPÍTULO 8

PROGRAMACIÓN LINEAL

8.1. El problema de la programación lineal

Un problema de programación lineal está definido por una función F que hay que optimizar (función objetivo), y unas restricciones que determinan el conjunto (conjunto factible) al que pueden pertenecer las variables.

Definir la función objetivo:

BH

$$F(x\downarrow 1, x\downarrow 2, \ldots, x\downarrow n) := c\downarrow 1 x\downarrow 1 + c\downarrow 2 x\downarrow 2 + \ldots + c\downarrow n x\downarrow n$$

Ejemplo 8.1.2

BH

$$F(x, y) := 0.13x + 0.12y$$

#1: $$F(x, y) := 0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y$$

Es necesario definir la función objetivo para luego determinar los extremos.

8.2. Resolución geométrica del problema de la programación lineal en dos dimensiones

En este capítulo, será muy útil manejar la ventana 2D, o 3D para representar el conjunto factible.

Representación geométrica de las restricciones

Abrir la ventana 2D (3D):

BH

Ventana > Nueva 2D (Nueva 3D)

Seleccionar el rango de la gráfica (en cada eje), dependiendo del problema:

BH

Seleccionar > *Rango de la gráfica*
> *Sí*

Representar las desigualdades que intervienen en la delimitación del conjunto factible:

BH

$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge ax + by \leq c \wedge a' x + b' y \geq c' \wedge \ldots .$
Insertar > *Gráfica*

Representar, una a una, las igualdades que intervienen en la delimitación del conjunto factible:

BH

$a'' x + b'' y = c''$
Insertar > *Gráfica*

Ejemplo 8.2.1

Una vez abierta la ventana 2D, seleccionar el rango:

BH

Seleccionar > *Rango de la gráfica* (*horiz.* –600, 100000, 1
vert. –600, 100000, 1)
> *Sí*

representar las restricciones:

BH

$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 7x + y \leq 230400 \wedge 3x + 3y \leq 259200 \wedge x + 2y \leq 525600 \wedge x + 2y \geq 115200$

#2: $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 7 \cdot x + y \leq 230400 \wedge 3 \cdot x + 3 \cdot y \leq 259200 \wedge x + 2 \cdot y \leq 525600 \wedge x + 2 \cdot y \geq 115200$

Se aconseja probar con distintos rangos para ver las posibilidades que ofrece DERIVE. También se pueden representar las regiones una a una (figura 2, del libro de texto).

Según el Teorema [8.2.1], el valor extremo se alcanza en un vértice del conjunto factible, por tanto hay que calcular dichos vértices.

Cálculo de los vértices del conjunto factible

Basta con determinar, en la región factible, cuáles son las ecuaciones de las rectas que intervienen en cada punto extremo y calcular los puntos de corte correspondientes.

Observación

Otra forma de calcular los vértices es situar el cursor en dichos puntos y fijarse en las coordenadas que aparecen en la parte inferior izquierda de la ventana 2D en la que estamos (pero la precisión de este método no es muy grande).

Se utiliza el comando

BH

Resolver > Expresión

Ejemplo 8.2.2

En la región factible del ejemplo anterior hay cuatro vértices.

Para determinar qué ecuaciones intervienen se representan las igualdades que resultan al cambiar el símbolo "≤", "≥" por "=" en las restricciones.

BH

$7x + y = 230400$
Insertar > Gráfica

$3x + 3y = 259200$
Insertar > Gráfica

$x + 2y = 115200$
Insertar > Gráfica

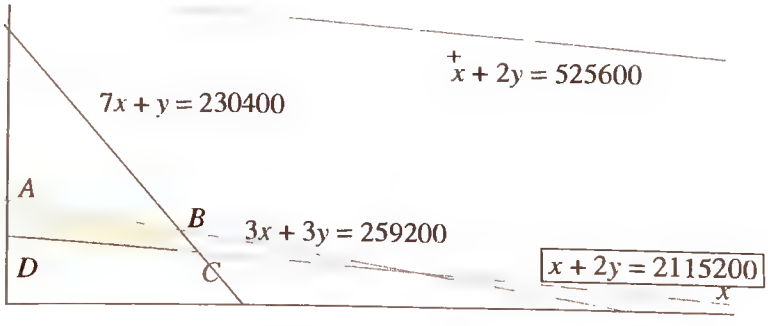
$x + 2y = 525600$
Insertar > Gráfica

#3: $7 \cdot x + y = 230400$

#4: $3 \cdot x + 3 \cdot y = 259200$

#5: $x + 2 \cdot y = 115200$

#6: $x + 2 \cdot y = 525600$



El vértice D es el punto de corte de $x = 0$ y la recta $x + 2y = 115200$:

BH

$x = 0 \wedge x + 2y = 115200$
Resolver > Expresión (var x, y, Real, Algebraico)
> Resolver

#7: $x = 0 \wedge x + 2 \cdot y = 115200$

#8: SOLVE $(x = 0 \wedge x + 2 \cdot y = 115200, [x, y], \text{Real})$

#9: $x = 0 \wedge y = 57600$

Calcular A, B, C por el mismo procedimiento.

El vértice C

#10: $7 \cdot x + y = 230400 \wedge x + 2 \cdot y = 115200$

#11: SOLVE $(7 \cdot x + y = 230400 \wedge x + 2 \cdot y = 115200, [x, y], \text{Real})$

#12: $$x = \frac{345600}{13} \wedge y = \frac{576000}{13}$$

Aproximar la solución obtenida.

BH

Simplificar > *Aproximar* > *Aproximar*

#13: $x = 2.658461538 \cdot 10^4 \wedge y = 4.43076923 \cdot 10^4$

El vértice B

#14: $7 \cdot x + y = 230400 \wedge 3 \cdot x + 3 \cdot y = 259200$

#15: SOLVE $(7 \cdot x + y = 230400 \wedge 3 \cdot x + 3 \cdot y = 259200, [x, y], \text{Real})$

#16: $x = 24000 \wedge y = 62400$

El vértice A

#17: $x = 0 \wedge 3 \cdot x + 3 \cdot y = 259200$

#18: SOLVE $(x = 0 \wedge 3 \cdot x + 3 \cdot y = 259200, [x, y], \text{Real})$

#19: $x = 0 \wedge y = 86400$

Cálculo del valor de la función objetivo en los vértices

Como se tiene definida la función objetivo F, basta evaluarla en A, B, C, D:

***F* (*A*)**

BH

F (0,86400)
=

#20: *F* (0,86400)

#21: 10368

$F(B)$

#22: $F(24000, 62400)$

#23: 10608

$F(C)$

#24: $F\left(\frac{345600}{13}, \frac{576000}{13}\right)$

#25: $\frac{114048}{13}$

Aproximar:

#26: 8772.923076

$F(D)$

#27: $F(0, 57600)$

#28: 6912

Por tanto el máximo de la función objetivo F se alcanza en $B = (24000, 62400)$.

Observación

Si se representa la función objetivo para distintos valores se observa que el mayor valor lo alcanza en el vértice B.

En efecto:

#29: $0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y = 5000$

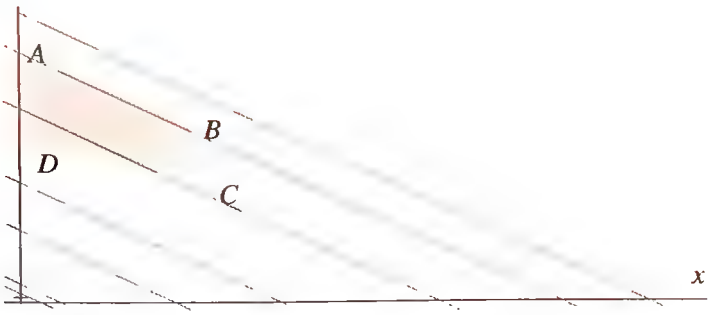
#30: $0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y = 8000$

#31: $0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y = 3000$

#32: $0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y = 10330$

#33: $0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y = 10300$

#34: $0.13 \cdot x + 0.12 \cdot y = 12000$



Como se ha recomendado en ocasiones anteriores, para ver la gráfica en 2D basta con hacer doble click sobre ella.

8.3. Expresión matricial del problema general en *n* variables

Añadiendo las variables de holgura a cada desigualdad que determina el conjunto factible se obtiene un sistema de ecuaciones, que puede expresarse en forma matricial, como hemos visto en capítulos anteriores.

Ejemplo 8.3.1

Expresión matricial del problema dado.

BH

[1, 2, 0, 0, 0; 0, 1, 4, 1, 0; 1, −1, −1, 0, −1] [x↓1; x↓2; x↓3; x↓4; x↓5] = [2; 8; 5]

=

#35:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

#36:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x_2 + x_1 = 2 \\ x_4 + 4 \cdot x_3 + x_2 = 8 \\ -x_5 - x_3 - x_2 + x_1 = 5 \end{bmatrix}$$

8.4. Conjunto convexos

Para determinar si un conjunto es convexo o no, podemos representarlo gráficamente.
Es convexo si dados dos puntos cualesquiera del conjunto el segmento que los une está íntegramente contenido en dicho conjunto.

Ejemplo 8.4.2

Abrir una ventana 2D (se selecciona previamente una escala adecuada):

BH

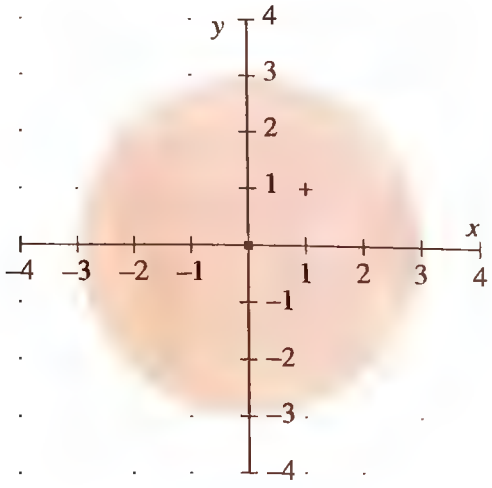
Selección > Relación de aspecto (Restablecer > Sí)

en la línea de edición se escribe:

BH

$x \wedge 2 + y \wedge 2 \leq 3 \wedge 2$
Insertar > Gráfica

#37: $x^2 + y^2 \leq 3^2$



Ejemplo 8.4.3

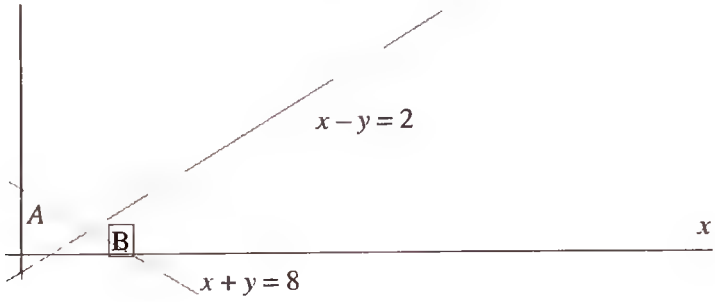
Representación del conjunto factible:

Se abre una ventana 2D y después de seleccionar el rango de la gráfica, se edita:

BH

$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \geq 8 \wedge x - y \leq 2$
Insertar > Gráfica

#38: $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \geq 8 \wedge x - y \leq 2$



En dicha gráfica se representan también las rectas $x + y = 8$, $x - y = 2$, una a una:

#39: $x - y = 2$

#40: $x + y = 8$

Calcular el vértice *B*:

BH

$x + y = 8 \wedge x - y = 2$
Resolver > Expresión (variables x, y, Algebraico, Real) > Resolver

#41: $x + y = 8 \wedge x - y = 2$

#42: SOLVE $(x + y = 8 \wedge x - y = 2, [x, y]$, Real)

#43: $x = 5 \wedge y = 3$

Calcular el vértice *A*:

BH

$x + y = 8 \wedge x = 0$
Resolver > Expresión (variables x, y, Algebraico, Real) > Resolver

#44: $x + y = 8 \wedge x = 0$

#45: SOLVE $(x + y = 8 \wedge x = 0, [x, y], \text{Real})$

#46: $x = 0 \wedge y = 8$

8.5. Teorema fundamental de la programación lineal

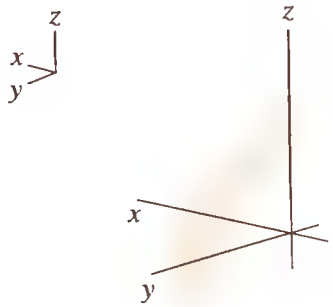
Ejemplo 8.5.1

Se abre una ventana 3D; se representa el plano $x + y + z = 3$, previa selección del rango de la gráfica según las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

BH

$x + y + z = 3$
Insertar > Gráfica

#47: $x + y + z = 3$



Ejercicios propuestos en exámenes

Ejercicio 1

En un tratamiento se están utilizando dos tipos de radiaciones. Cuando se utiliza el tipo 1 la absorción de radiaciones por unidad de superficie se efectúa del siguiente modo: zona sana: 40%, órganos periféricos: 30%, zona afectada: 50%, centro del tumor: 60%, y cuando se utiliza el tipo 2, zona sana: 50%, órganos periféricos: 10%, zona afectada: 50%, centro del tumor: 40%. Escríbanse las restricciones que deben cumplir las cantidades de cada radiación, de modo que, los tejidos sanos absorban la cantidad mínima de radiación, teniendo en cuenta que, los órganos periféricos se dañarían si recibieran más de 2.700 unidades, la zona afectada debe recibir 6.000 unidades y el centro del tumor una cantidad al menos igual a las 6.000 unidades.

Solución:

La función a minimizar es: $z = 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2$, donde x_1 es la cantidad de radiación del 1.er tipo, x_2 es la cantidad de radiación del 2.º tipo y la función z está sujeta a las restricciones:

$$0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \leq 2700;\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 6.000;$$
$$0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \geq 6000\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Ejercicio 2

En el siguiente problema de programación lineal: "Calcular el max $z = 5x_1 + 2x_2$ con las restricciones: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$; $10x_1 + 4x_2 \leq 20$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$". Convertimos las desigualdades en igualdades mediante las variables de holgura x_3, x_4. Se pide elegir las afirmaciones correctas, si existen, de entre las siguientes:

a) (2, 0, 0, 0) es una solución factible básica.
b) (3, 1, 2, 0) es una solución factible básica.
c) Cualquier punto que pertenezca al segmento [(20/19, 45/19), (2, 0)], es solución óptima.

Solución:

(2, 0, 0, 0) es factible (satisface todas las restricciones) y es básico porque no tiene más de dos componentes positivas distintas de 0.

(3, 1, 2, 0) no es factible (no satisface la segunda restricción).

Cualquier punto del segmento [(20/19,45/19), (2, 0)] es solución óptima porque la función objetivo es paralela a la frontera de la región de posibilidad a que pertenece el segmento dado. *Son ciertas a) y c).*

Ejercicio 3

Un despacho de abogados está dividido en dos departamentos, en el 1.º se realiza el estudio de los casos, y en el 2.º se prepara la defensa. Intervienen en 2 tipos de problemas, para cada caso del 1.er tipo se utilizan 2 horas del 1.er departamento y 5 del 2.º y para los del 2.º tipo se emplean 4 h. del 1.er departamento y 2 del 2.º. Sabiendo que cada caso del 1.er tipo deja 150000 euros de beneficios y cada uno del 2.º, 300.000 euros, se desea conocer cuántos casos de clase hay que resolver en una semana para rentabilizar al máximo los beneficios, teniendo en cuenta que el despacho sólo permanece abierto un máximo de 40 horas semanales. Se pide escribir la función objetivo y las restricciones.

Solución:

	tipo1	tipo 2	
número de casos	x_1	x_2	
tiempo departamento 1	$2x_1$	$4x_2$	$2x_1 + 4x_2 \leq 40\ x_1, x_2, \geq 0$
tiempo departamento 2	$5x_1$	$2x_2$	$5x_1 + 2x_2 \leq 40$
ganancia.	$150000x_1$	$300000x_2$	$z = 150000x_1 + 300000x_2$

Ejercicio 4

Determínese el valor mínimo de la función $z = 20x_1 + 30x_2$ y los valores de (x_1, x_2) en que se obtiene dicho mínimo, sujeto a las restricciones:

$$x_1 + x_2 \leq k;\ 5x_1 + 10x_2 \leq 200;\ 4x_1 + 2x_2 \leq 80;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0, \text{ si } k \in [{}^{80}/_{3}, +\infty).$$

Solución:

$k \geq {}^{80}/_{3} \Rightarrow$ La primera restricción se convierte en $x_1 + x_2 \leq {}^{80}/_{3}$ y es superflua puesto que, no modifica el recinto definido por las otras restricciones.

La región factible es el polígono convexo de vértices $(0, 0), (0, 20), ({}^{40}/_{3}, {}^{40}/_{3}), (20,0)$.

En dicha región, es evidente que, z alcanza el mínimo en $(0, 0)$ y vale 0.

Ejercicio 5

Dado el problema de programación lineal cuyas restricciones son $x + 2y \geq 110$; $x + 4y \leq 160$; $x + y \leq 100$; $x + y \geq 0$; $x, y \geq 0$. Se pide determinar los vértices de la región de posibilidad.

Solución:

La región de posibilidad es el triángulo cuyos vértices son: (60, 25), (80, 20), (90, 10).

Ejercicio 6

Dado el problema de programación lineal: "Maximizar $f = -10x + 30y$, con las restricciones $-x + 2y \leq 0$, $y \leq 4000$, $x \geq 0$, $y \geq 0$". De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas si existen:

a) La región factible no es acotada y por tanto *f* no alcanza máximo en ella.
b) La región factible no es acotada, pero *f* tiene máximo en ella.
c) La región factible es acotada y por tanto *f* alcanza un máximo en ella.

Solución:

Es cierta b). El máximo lo alcanza en (8000, 4000).

Ejercicio 7

En el problema de programación lineal: "Calcular el max de $z = 150.000x_1 + 300.000x_2$ con las restricciones: $5x_1 + 2x_2 \leq 40$; $2x_1 + 4x_2 \leq 40$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$", de entre las opciones siguientes, elíjanse las correctas, si existen:

a) La región factible es el triángulo de vértices: A (0, 0), B (0, 10), C (8, 0).
b) La función objetivo alcanza el máximo en más de un vértice.
c) El máximo de la función objetivo es: 3×10^6

Solución: Son ciertas *b*) y *c*).

La región factible es el polígono convexo de vértices:

$$A\,(0, 0), B\,(0, 10), C\,(5, {}^{15}\!/_{2}), D\,(8, 0).$$

La función objetivo alcanza en ellos los siguientes valores: $z_A = 0$, $z_B = 3 \times 10^6$, $z_C = 3 \times 10^6$, $z_D = 1{,}2 \times 10^6$

El máximo se alcanza en los vértices B y C. Cuando esto ocurre, significa que, las curvas de nivel son paralelas al lado del polígono convexo que une esos dos vértices y por tanto tiene el mismo valor óptimo para todos los puntos del segmento.

Ejercicio 8

Se desea invertir no más de un millón de euros en acciones. Se acuerda invertir en X como máximo 600.000 euros, y al menos 200.000 euros en Y. Los beneficios de X serán el 10% y los de Y del 7%. Sabiendo que la inversión en X debe ser, al menos, tanto como en Y ¿Cómo debe efectuarse la inversión para maximizar los beneficios anuales?

a) Plantéese el problema.
b) Escríbase el sistema de ecuaciones lineales obtenido al introducir las variables de holgura que sean necesarias.
c) ¿Cuál es la solución óptima?

Solución:

	En X	En Y		
Inversión	x_1	x_2	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$ $x_1 + x_2 \leq 1.000.000$	*Restricciones*
Limitaciones			$x_1 \leq 600.000, x_2 \geq 200.000$	*Restricciones*
Relación entre cantidades			$x_2 \leq x_1$	*Restricción*
Beneficios	$0{,}10x_1$	$0{,}07x_2$	$z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$	*Función objetivo*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1.000.000 \\ x_1 + x_4 &= 600.000 \\ x_2 - x_5 &= 200.000 \\ x_2 - x_1 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

La función objetivo alcanza en los vértices los valores:

$$z\,(200.10^3, 200.10^3) = 34.000,\ z\,(600.10^3, 200.10^3) = 74.000,$$
$$z\,(600.10^3, 400.10^3) = 88.000,\ z\,(500.10^3, 500.10^3) = 85.000$$

El máximo se alcanza en el vértice $(600.10^3, 400.10^3)$

Ejercicio 9

Dados los conjuntos:

$$I_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 25\right\},$$
$$I_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 25\right\},$$
$$I_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \geq 0, x - y \geq 0\right\},$$
$$I_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\right\}.$$

Elíjase la afirmación cierta de entre las siguientes:

a) I_1 e I_4 son conjuntos convexos.
b) I_2, I_3 e I_4 son conjuntos convexos.
c) I_4, no es conjunto convexo.

Solución:

Un conjunto es convexo cuando para todo par de sus puntos el segmento que los une está incluido en dicho conjunto.

$I_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 25\}$ es la circunferencia de radio 5 centrada en el origen, no es un conjunto convexo, ya que, si tomamos dos puntos cualesquiera, el segmento que los une es una cuerda que no está contenida en ella.

$I_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 25\}$ es el círculo de radio 5, y la cuerda que une cualquier pareja de puntos está contenida en dicho conjunto. Es decir es convexo.

$I_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$, es la intersección de dos semiplanos, luego es convexo.

$I_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ es la bisectriz del 1.º y 3.ª cuadrante. También es convexo. Luego la solución válida es *b*).

Ejercicio 10

En el sistema de desigualdades $I_1 : x > 0$; $I_2 : y > 0$; $I_3 : x + y < 4$; $I_4 : 2x + y < 6$; $I_5 : x + 2y < 10$; hay alguna superflua. De entre las siguientes afirmaciones, elíjase la correcta: Son superfluas

a) I_3 e I_4.
b) I_3 e I_5.
c) I_5.

Solución:

Una inecuación es superflua, cuando su omisión no produce modificación en el convexo de soluciones. Por tanto, si consideramos el convexo de soluciones: I_1; I_2; I_3; I_4; I_5. La inecuación superflua es I_5 (opción *c*).

Ejercicios propuestos en exámenes resueltos con DERIVE

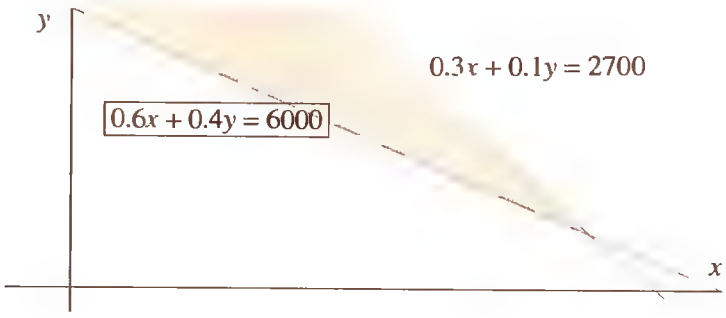
Ejercicio 1

Representar la región en una ventana 2D.
Se abre una ventana 2D:

BH

Ventana > Nueva 2D
$0.6x + 0.4y \geq 6000 \wedge 0.3x + 0.1y \leq 2700 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$
Insertar > Gráfica

#1: $0.6 \cdot x + 0.4 \cdot y \geq 6000 \wedge 0.3 \cdot x + 0.1 \cdot y \leq 2700 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

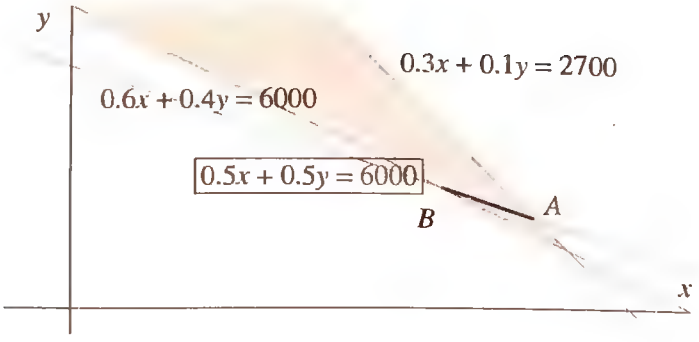


Se representa la recta:

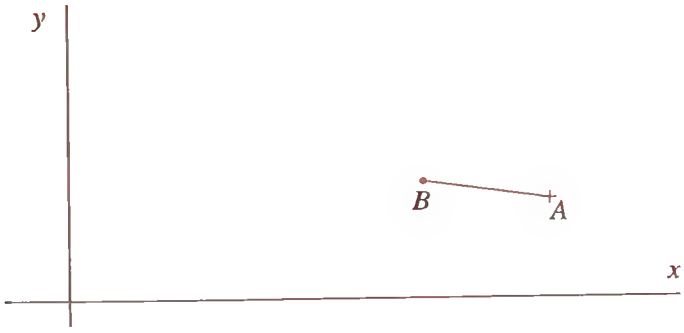
BH

$0.5x + 0.5y = 6000$
Insertar > Gráfica

#2: $0.5 \cdot x + 0.5 \cdot y = 6000$



El conjunto factible es el trozo de la recta $0.5x + 0.5y = 6000$ que queda dentro de la parte sombreada:

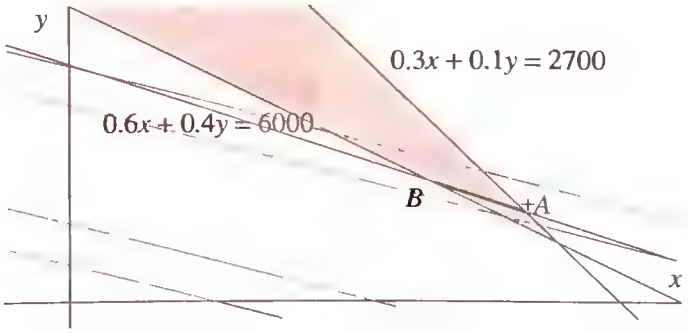


En este problema sólo se pide el planteamiento del programa de programación lineal. Pero se puede representar la función objetivo $z = 0.4x + 0.5$ y para distintos valores de z.

#3: $0.4 \cdot x + 0.5 \cdot y = 2000$

#4: $0.4 \cdot x + 0.5 \cdot y = 5000$

#5: $0.4 \cdot x + 0.5 \cdot y = 6000$



Ejercicio 2

Bastaría representar la región en una ventana 2D, hallar los vértices del convexo y evaluar la función objetivo en los vértices.

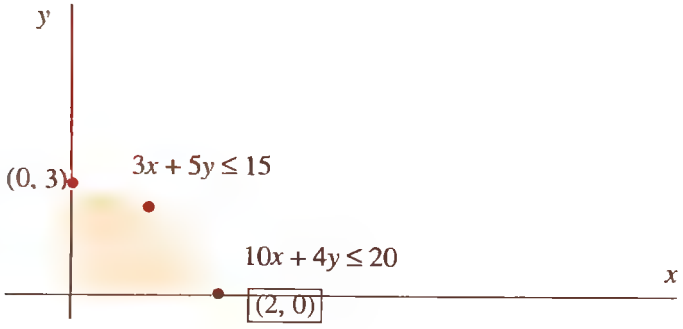
Representación de la región factible:

BH

$3x + 5y \le 15 \wedge 10x + 4y \le 20 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$

Insertar > *Gráfica*

#6: $3 \cdot x + 5 \cdot y \leq 15 \wedge 10 \cdot x + 4 \cdot y \leq 20 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$



Cálculo de los vértices del convexo.

BH

Resolver > *Sistema*
(2 ecuaciones > *Sí)*
$3x + 5y = 15$
$10x + 4y = 20$
Variables, x, y > *Resolver*

#7: SOLVE ([$3 \cdot x + 5 \cdot y = 15$, $10 \cdot x + 4 \cdot y = 20$], [$x$, y])

#8: $$\left[x = \frac{20}{19} \wedge y = \frac{45}{19}\right]$$

Cálculo de los vértices que están en los ejes:
En el eje de ordenadas

BH

$3x + 5y = 15$
Simplificar > *Sustituir variable* ($x = 0$) > *Simplificar*

#9: $3 \cdot x + 5 \cdot y = 15$

#10: $5 \cdot y = 15$

En el eje de abscisas:

BH

$10x + 4y = 20$
Simplificar > *Sustituir variable* ($y = 0$) > *Simplificar*

#11: $10 \cdot x + 4 \cdot y = 20$

#12: $10 \cdot x = 20$

Definir la función objetivo:

BH

$\max(x, y) := 5x + 2y$

Evaluar la función objetivo en los vértices del convexo:

BH

max (2, 0)
=
max (0, 3)
=
max (20/19, 45/19)
=

#13: $\max(x, y) := 5 \cdot x + 2 \cdot y$

#14: max (2, 0)

#15: 10

#16: max (0, 3)

#17: 6

#18: $\max\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$

#19: 10

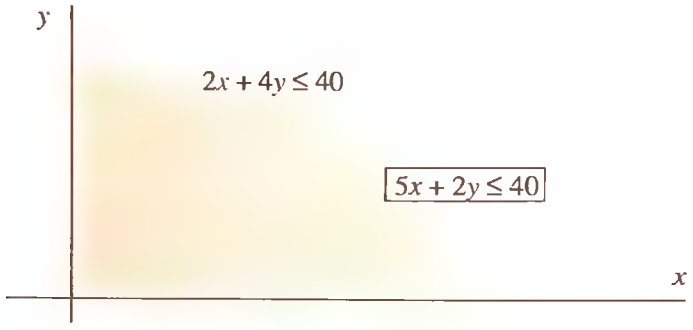
Ejercicio 3

Basta representar la región en una ventana 2D, hallar los vértices del convexo y evaluar. Para ver bien la gráfica es conveniente seleccionar el rango adecuado de las variables x, y:

BH

$5x + 2y \le 40 \wedge 2x + 4y \le 40 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$
Insertar > *Gráfica*

#20: $5 \cdot x + 2 \cdot y \leq 40 \wedge 2 \cdot x + 4 \cdot y \leq 40 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$



Las opciones para hallar los vértices son:

— recorrer la gráfica con el cursor, detenerlo en dichos vértices y observar las coordenadas correspondientes o
— analíticamente, es decir, resolver los sistemas de ecuaciones que resultan:

BH

Resolver > *Sistema*
(2 *ecuaciones* > *Sí*)
$5x + 2y = 40$
$2x + 4y = 40$
Variables, x, y > *Resolver*

#21: SOLVE ([$5 \cdot x + 2 \cdot y = 40$, $2 \cdot x + 4 \cdot y = 40$], [$x$, y])

#22: $\left[x = 5 \wedge y = \frac{15}{2}\right]$

Los cortes con los ejes son:
Con el eje de ordenadas

BH

$2x + 4y = 40$
Simplificar > *Sustituir variable* ($x = 0$) > *Simplificar*

#23: $2 \cdot x + 4 \cdot y = 40$

#24: $4 \cdot y = 40$

Con el eje de abscisas:

BH

$5x + 2y = 40$

Simplificar > *Sustituir variable* ($y = 0$) > *Simplificar*

#25: $5 \cdot x + 2 \cdot y = 40$

#26: $5 \cdot x = 40$

Definir la función objetivo:

BH

$\max(x, y) := 150000x + 300000y$

Evaluar la función objetivo en los vértices del convexo:

BH

max (5, 15/2)
=

#27: $\max(x, y) := 150.000 \cdot x + 300.000 \cdot y$

#28: $\max\left(5, \frac{15}{2}\right)$

#29: 3.000.000

#30: max (0, 10)

#31: 3.000.000

#32: max (8, 0)

#33: 1.200.000

Ejercicio 4

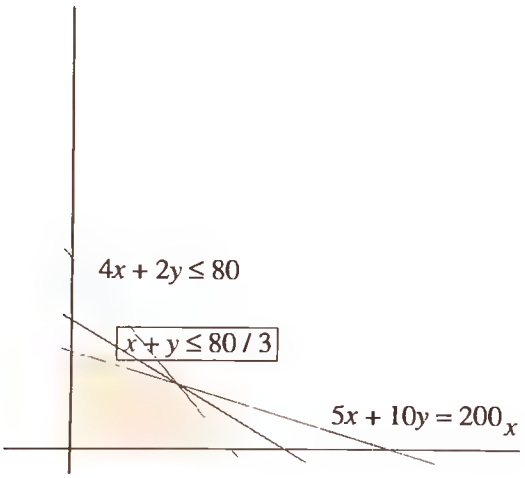
Caso primero, $k = 80/3$.
Abrir ventana 2D:

BH

$x + y \le 80/3 \wedge 5x + 10y \le 200 \wedge 4x + 2y \le 80 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$

Representar > Gráfica

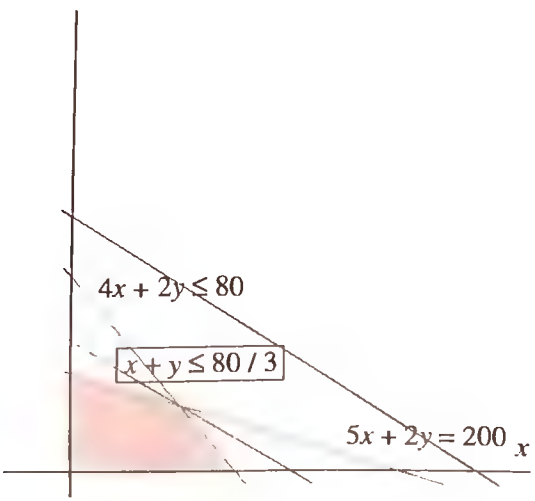
#34: $x + y \le \frac{80}{3} \wedge 5 \cdot x + 10 \cdot y \le 200 \wedge 4 \cdot x + 2 \cdot y \le 80 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$



Por tanto, la restricción $x + y \le k$ para $k \ge 80/3$, es superflua, ya que si se representa $x + y = 50$, el convexo que se define es el mismo:

BH

$x + y = 50$
Representar > Gráfica



Hallar los vértices:

BH

Resolver > *Sistema*
(3 *ecuaciones* > *Sí*)
$5x + 10y = 200$
$4x + 2y = 80$
$x + y = 80/3$
Variables, x, y > *Resolver*

#35: $\text{SOLVE}\left(\left[5 \cdot x + 10 \cdot y = 200, 4 \cdot x + 2 \cdot y = 80, x + y = \frac{80}{3}\right], [x, y]\right)$

#36: $\left[x = \frac{40}{3} \wedge y = \frac{40}{3}\right]$

Los puntos de corte con los ejes, son (0,20), (20, 0).
Evaluación de la función objetivo en los vértices del convexo:

BH

$\min(x, y) := 20x + 30y$
$\min(0,20)$
=
$\min(20, 0)$
=
$\min(40/3, 40/3)$
=
Simplificar > *Aproximar* > (*número de decimales*, 4) > *Aproximar*
$\min(0, 0)$
=

#37: $\min(x, y) := 20 \cdot x + 30 \cdot y$

#38: $\min(0, 20)$

#39: 600

#40: $\min(20, 0)$

#41: 400

#42: $\min\left(\frac{40}{3}, \frac{40}{3}\right)$

#43: $\frac{2000}{3}$

Aproximar:

BH

Simplificar > *Aproximar*

#44: 666.6666666

#45: min (0, 0)

#46: 0

Luego el mínimo lo alcanza en (0,0), como era de esperar por la representación gráfica de la función objetivo.

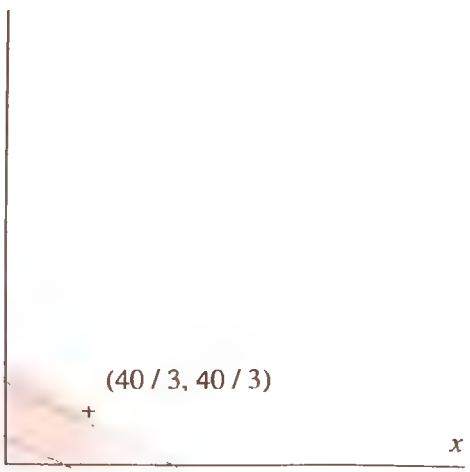
En efecto:

BH

$20x + 30y = 200$
Insertar > *Gráfica*
$20x + 30y = 600$
Insertar > *Gráfica*

#47: $20 \cdot x + 30 \cdot y = 200$

#48: $20 \cdot x + 30 \cdot y = 600$



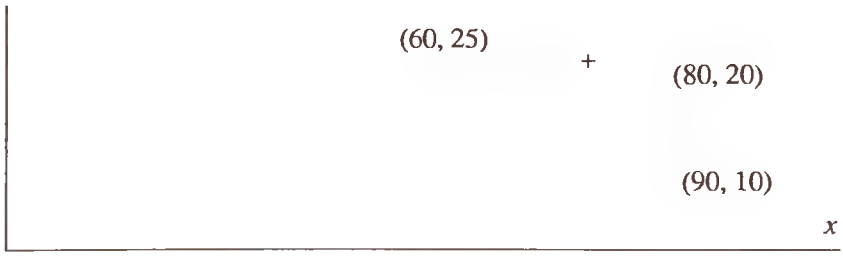
Ejercicio 5

Representar la región en una ventana 2D y hallar los vértices del convexo:

BH

$x + 2y \geq 110 \wedge x + 4y \leq 160 \wedge x + y \leq 100 \wedge x + y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$
Insertar > *Gráfica*

#49: $x + 2 \cdot y \geq 110 \wedge x + 4 \cdot y \leq 160 \wedge x + y \leq 100 \wedge x + y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$



BH

Resolver > *Sistema*
(2 *ecuaciones* > *Sí*)
$x + 2y = 110$
$x + 4y = 160$
Variables, x, y > *Resolver*

#50: SOLVE $([x + 2 \cdot y = 110, x + 4 \cdot y = 160], [x, y])$

#51: $[x = 60 \wedge y = 25]$

BH

Resolver > *Sistema*
(2 *ecuaciones* > *Sí*)
$x + 2y = 110$
$x + y = 100$
(*Variables, x, y*) > *Resolver*

#52: SOLVE $([x + 2 \cdot y = 110, x + y = 100], [x, y])$

#53: $[x = 90 \wedge y = 10]$

BH

Resolver > Sistema
(2 ecuaciones > Sí)
$x + 4y = 160$
$x + y = 100$
Variables, x, y > Resolver

#54: SOLVE ($[x + 4 \cdot y = 160, x + y = 100], [x, y]$)

#55: $[x = 80 \wedge y = 20]$

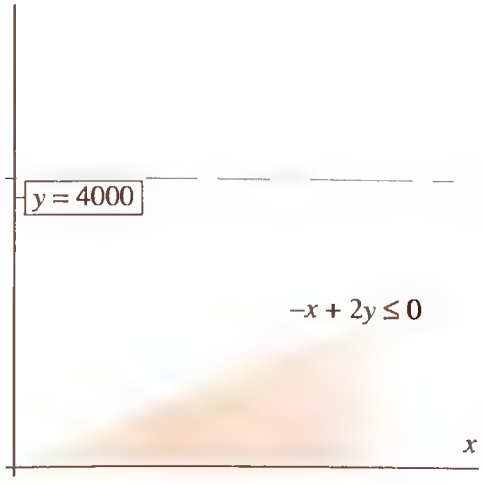
Ejercicio 6

Representar la región en una ventana 2D, hallar los vértices del convexo y evaluar la función objetivo en los vértices.

BH

$-x + 2y \leq 0 \wedge y \leq 4000 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$
Insertar > Gráfica

#56: $-x + 2 \cdot y \leq 0 \wedge y \leq 4000 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$



Es evidente que no está acotada por la derecha.

BH

$y = 4000 \wedge -x + 2y = 0$
Resolver > Expresión (Variables, x, y, Algebraico, Real)
> Resolver

#57: $y = 4000 \wedge -x + 2 \cdot y = 0$

#58: SOLVE $(2 \cdot y - x = 0 \wedge y = 4000, [x, y], \text{Real})$

#59: $x = 8000 \wedge y = 4000$

BH

$f(x, y) := -10x + 30y$
$f(8000, 4000)$
$=$

#60: $f(x, y) := -10 \cdot x + 30 \cdot y$

#61: $f(8000, 4000)$

#62: 40000

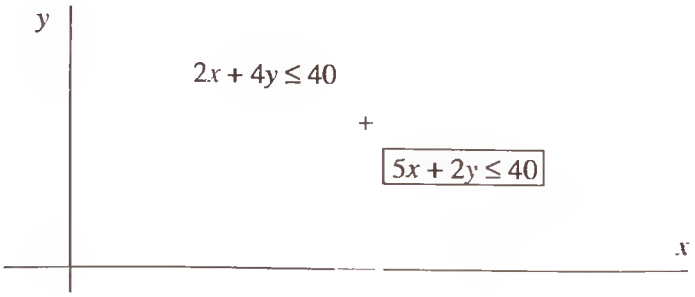
Ejercicio 7

Representar la región en una ventana 2D, hallar los vértices del convexo y evaluar la función objetivo en los vértices.

BH

$5x + 2y \le 40 \wedge 2x + 4y \le 40 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$
Insertar > Gráfica

#63: $5 \cdot x + 2 \cdot y \le 40 \wedge 2 \cdot x + 4 \cdot y \le 40 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$



BH

Resolver > *Sistema*
(2 *ecuaciones* > *Sí*)
$5x + 2y = 40$
$2x + 4y = 40$
Variables, x, y > *Resolver*

#64: SOLVE ([5 · x + 2 · y = 40, 2 · x + 4 · y = 40], [x, y])

#65:
$$\left[x = 5 \wedge y = \frac{15}{2}\right]$$

BH

$2x + 4y = 40$
Simplificar > *Sustituir variable* ($x = 0$) > *Simplificar*

#66: $2 \cdot x + 4 \cdot y = 40$

#67:
$$4 \cdot y = 40$$

BH

$5x + 2y = 40$
Simplificar > *Sustituir variable* ($y = 0$) > *Simplificar*

#68: $5 \cdot x + 2 \cdot y = 40$

#69: $5 \cdot x = 40$

BH

max $(x, y) := 150000x + 300000y$
max (5, 15/2)
=

#70: max $(x, y) := 150000 \cdot x + 300000 \cdot y$

#71:
$$\max\left(5, \frac{15}{2}\right)$$

#72:
$$3000000$$

#73: max (0, 10)

#74: 3000000

#75: max (8, 0)

#76: 1200000

Se puede representar $150000x + 300000y = 6000000$, y observar que es una recta que pasa por los vértices donde se alcanza el máximo.

#77: $150000x + 300000y = 6000000$

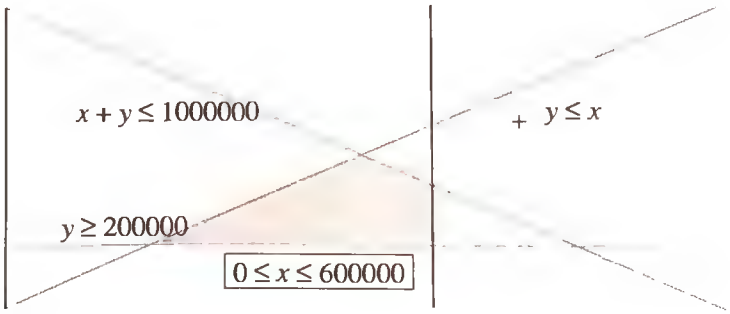
Ejercicio 8

Representar la gráfica en una ventana 2D.

BH

$x + y \le 1000000 \wedge 0 \le x \le 600000 \wedge y \ge 200000 \wedge y \le x$
Insertar > Gráfica

#78: $x + y \le 1000000 \wedge 0 \le x \le 600000 \wedge y \ge 200000 \wedge y \le x$



Definir la función objetivo y evaluarla en los vértices:

BH

$\max(x, y) := 0.10x + 0.07y$
$\max(200000, 200000)$
=
$\max(600000, 200000)$
=
$\max(500000, 500000)$

=

#79: $\max(x, y) := 0.1 \cdot x + 0.07 \cdot y$

#80: max (200000, 200000)

#81: 34000

#82: max (600000, 200000)

#83: 74000

#84: max (600000, 400000)

#85: 88000

#86: max (500000, 500000)

#87: 85000

Ejercicio 9

Se representan los conjuntos uno a uno. Se abre una ventana 2D. Para que al dibujar circunferencias no salgan elipses:

BH

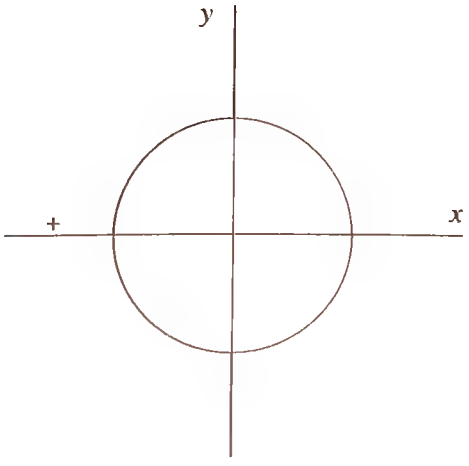
Seleccionar > Relación de Aspectos > Restablecer > Sí

Editar cada expresión:

BH

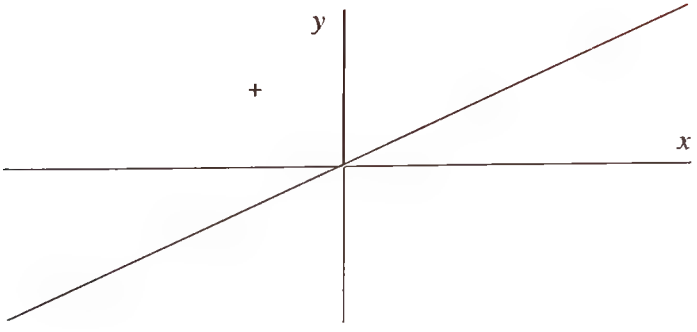
x^2 + y^2 = 25
Insertar > Gráfica

#88: $x^2 + y^2 = 25$

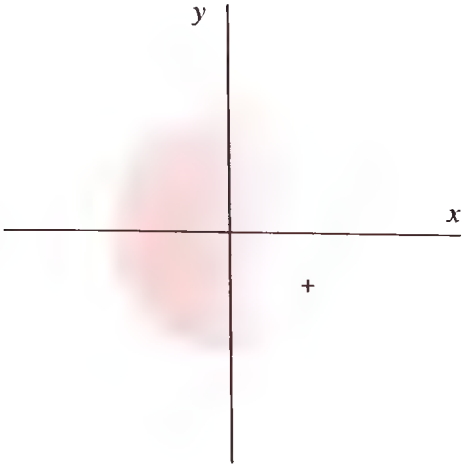


y análogamente para las otras regiones.

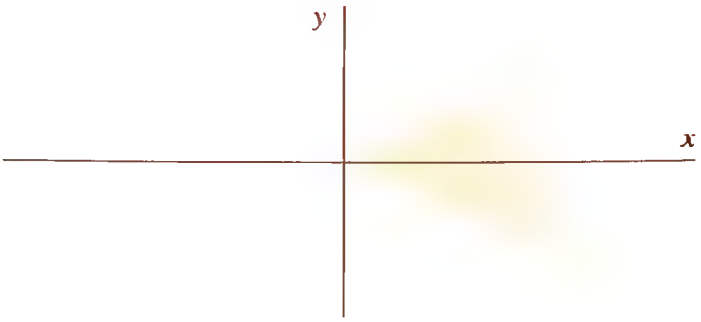
#89: $y = x$



#90: $x^2 + y^2 \leq 25$



#91: $x+y\geq 0 \wedge x-y\geq 0$



Ejercicio 10

Abrir una ventana 2D. Editar y representar:

BH

$x>0 \wedge y>0 \wedge x+y<4 \wedge 2x+y<6 \wedge x+2y<10$
Insertar > Gráfica (o con F4)

BH

También se puede representar una a una.

#92: $x>0 \wedge y>0 \wedge x+y<4 \wedge 2\cdot x+y<6 \wedge x+2\cdot y<10$

#93: $x+y=4$

#94: $2\cdot x+y=6$

#95: $x+2\cdot y=10$

VOCABULARIO

A

Adjunto de un elemento
Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, el adjunto de un elemento a_{ij} es el producto del menor complementario de este elemento multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

Adjunto de una submatriz
Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, el adjunto de la submatriz de orden h formado por las filas $i_1, i_2, \ldots, i_h$ y las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_h$ es su menor multiplicado por $(-1)^{i_1 + i_2 + \ldots + i_h + j_1 + j_2 + \ldots + j_h}$.

Álgebra
Conjunto que tiene estructura de anillo considerando la suma y la composición (o producto interno) y estructura de espacio vectorial considerando la suma y producto por elementos de $\mathbb{R}$, y verifica la asociatividad con escalares.

Algoritmo Simplex
Método de cálculo numérico que introduce una mecánica de resolución de un problema de programación lineal. Ver Capítulo 8 de las Unidades Didácticas.

Anillo
Es un conjunto A con dos operaciones en él definidas, suma (+) y producto (·) que verifican

1. Es un grupo abeliano respecto de la suma.
2. El producto posee la propiedad asociativa.
3. Posee la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, es decir, para elementos a, b y c de A se verifica $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Anillo conmutativo
Anillo en el que la operación producto es conmutativa.

Anillo unitario
Anillo en el que existe un elemento neutro para el producto, llamado elemento unidad del anillo.

Antiimagen
Dada una aplicación $f: A \to B$, para cada b elemento de B, su antiimagen son los elementos a de A tal que su imagen es b.

Aplicación
Dados dos conjuntos A y B, una aplicación f de A en B es una terna formada por $f: (C, A, B)$, donde C es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ tal que para cada a de A existe un único b de B tal que (a, b) es elemento de C. Se representa generalmente $f: A \to B$.

Aplicación bilineal
Dados tres espacios vectoriales U, V y W sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso), una aplicación bilineal es una aplicación $f: U \times V \to W$ que, para u y u' elementos de U, v y v' elementos de V y k elemento de K verifica.

1. $f(ku, v) = kf(u, v), f(u + u', v) = f(u, v) + f(u', v)$
2. $f(u, kv) = kf(u, v), f(u, v + v') = f(u, v) + f(u, v')$

Aplicación biyectiva
Aplicación inyectiva que es a la vez aplicación sobreyectiva. Es una aplicación tal que su inversa también es aplicación.

Aplicación identidad
Dados un espacio vectorial V, la aplicación identidad es la aplicación $i: V \to V$ que a cada vector $v \in V$ le asigna a sí mismo, es decir $i(v) = v$.

Aplicación inyectiva
Aplicación donde los elementos del conjunto imagen poseen a lo sumo una antiimagen.

Aplicación lineal
Dados dos espacios vectoriales U y V sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso), una aplicación lineal es una aplicación $f: U \to V$ que, para u y u' elementos de U y k elemento de K que verifica.

1. $f(ku) = kf(u)$
2. $f(u+u') = f(u)+f(u')$

Es una aplicación que conserva la estructura de espacio vectorial.

Aplicación nula
Dado un espacio vectorial V, la aplicación nula es la aplicacion $O: V \to V$ que a cada vector $v \in V$ le asigna el vector nulo de V, es decir $O(v) = 0 \in V$.

Aplicación sobreyectiva
Aplicación donde cada elemento del conjunto imagen posee por lo menos una antiimagen.

Autovalor
Dado un endomorfismo $f: V \to V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor si existe un vector $v \neq 0$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Autovector
Dado un endomorfismo $f: V \to V$, $v \in V$, vector $v \neq 0$ es un autovector si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda v$.

B

Base de un espacio vectorial
Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso), se dice que el sistema de vectores $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base de V si es un sistema linealmente independiente de generadores de V.

Base de un sistema de desigualdades lineales
Del número total de incógnitas del sistema de desigualdades lineales, su base está formada por las desigauldades que toman valores distintos de cero.

Base orientada positivamente
Base de un espacio vectorial en la que todos los elementos están orientados positivamente.

Base ortogonal
Base de un espacio vectorial en la que todos los elementos son vectores ortogonales.

Base ortonormada
Base ortonormal.

Base ortonormal
Base de un espacio vectorial donde los vectores son ortogonales dos a dos y la norma de cada uno de ellos es uno.

Biyección
Aplicación biyectiva.

C

Cabecera de la fila
Ver matriz escalonada por filas.

Cambio de escala
Multiplicar una ecuación de un sistema por un número grande, para evitar errores en las soluciones.

Clase de equivalencia
Conjunto de todos los elementos de un conjunto que están relacionados entre sí por una relación de equivalencia.

Clausura
Envolvente lineal.

Coeficientes de la combinación lineal
Ver combinación lineal.

Coeficientes de las incógnitas
Ver sistema de ecuaciones lineales.

Cofactor
Adjunto de una submatriz.

Columna
En una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensiones mxn, la columna j-ésima de A es la familia $(a_{1j}\ a_{2j} \ldots a_{mj})$.

Columna pivote
En la tabla del Método Simplex es la columna a la que pertenece el elemento más negativo de la fila objetivo.

Combinación lineal
Dados los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de un espacio vectorial V, se llama combinación lineal de estos vectores a todo vector v que se puede expresar, para escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, como

$$v = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \ldots + a_n \cdot u_n$$

Los coeficientes de la combinación lineal son los escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Combinación lineal convexa
Dados los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de un espacio vectorial de dimensión m, diremos que un punto P es combinación lineal convexa de ellos si existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que

$$P = a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + \ldots + a_k \cdot P_k$$

con $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$.

Complementario ortogonal
Dados un espacio vectorial euclídeo V, de dimensión n y U, un subespacio del mismo, el complemento ortogonal de U (denotando $U^{\perp}$) es el subespacio ortogonal a U, tal que la suma de dimensiones de U y $U^{\perp}$ es n.

Condición necesaria
Condición que se debe cumplir para que se verifique un resultado.

Condición suficiente
Condición que, si se cumple, implica que se verifica un resultado.

Conjunto
Colección bien definida de objetos, es decir, siempre se puede decir si un objeto pertenece a él.

Conjunto convexo
Conjunto en el que dados dos puntos cualesquiera, el segmento que los une está contenido en el conjunto.

Conjunto de vectores
Conjunto en el sus elementos son vectores.

Conjunto final
Conjunto imagen.

Conjunto factible
Convexo solución.

Conjunto generador
Ver generador de un conjunto.

Conjunto imagen
Es el conjunto B de una aplicación.

Conjunto inicial
Conjunto origen.

Conjunto libre
Conjunto de vectores que son linealmente independientes.

Conjunto ligado
Conjunto de vectores que son linealmente dependientes.

Conjunto origen
Es el conjunto A de una aplicación.

Conjuntos equivalentes de vectores
Conjuntos de vectores que engendran el mismo subespacio.

Contraejemplo
Caso particular concreto o ejemplo que no verifica una afirmación y que es utilizado, generalmente, para demostrar que dicha afirmación no es cierta.

Convexo de soluciones
Convexo solución.

Convexo de soluciones acotado
Convexo solución que verifica que la poligonal que lo delimita es cerrada.

Convexo de soluciones no acotado
Convexo solución que verifica que la poligonal que lo delimita es abierta.

Convexo solución
Subconjunto del plano cuyos puntos satisfacen simultáneamente todas las restricciones de un problema de programación lineal.

Coordenadas
Expresión $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de un elemento v de un espacio vectorial de dimensión n respecto a una base del mismo $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, si

$$v = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + ... + x_n \cdot e_n$$

Coordenadas cartesianas
Coordenadas de un vector x respecto al sistema cartesiano de referencia del espacio.

Correspondencia biyectiva
Aplicación biyectiva.

Coseno de un ángulo entre dos vectores
Dados dos vectores x e y de un espacio vectorial euclídeo E_3 de dimensión 3, su coseno, que se denota cos (x, y), es el cociente

$$\cos(x, y) = x \cdot y / (\|x\| \cdot \|y\|)$$

si $x \cdot y$ es el producto escalar definido en el espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ es la norma.

Cuerpo
Un anillo K, con las operaciones suma y producto, se dice que es un cuerpo si

1. Es anillo conmutativo.
2. Es anillo unitario y su unidad es distinta del elemento neutro para la suma (cero).
3. Todos los elementos distintos del cero poseen inverso respecto al producto.

El cuerpo que generalmente se considera a lo largo de esta asignatura es $\mathbb{R}$.

D

Desigualdad
Expresión en la que distintas variables y coeficientes están relacionadas entre sí por uno de los siguientes operadores $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

Desigualdad lineal
Desigualdad en la relación que verifican las variables son lineales.

Desigualdad lineal en dos variables
Desigualdad en la que dos variables x e y están relacionadas entre sí por una de las siguientes formas

$$ax + by > c$$
$$ax + by < c$$
$$ax + by \geq c$$
$$ax + by \leq c$$

donde a,b y c son constantes.

Desigualdad superflua
Una desigualdad cuya omisión en el sistema de desigualdades lineales no produce modificación en el convexo de soluciones.

Determinante de una matriz
Dada una matriz cuadrada de orden n, con elementos de un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuesiro caso), su determinante es el escalar que se obtiene al sumar todos los diferentes productos de n elementos que se pueden formar con los elementos de dicha matriz, de modo que en cada producto figuren un sólo elemento de cada fila y un sólo elemento de cada columna. A cada producto se le asigna el signo + si la permutación de los subíndices de la fila de sus elementos es de la misma clase que la permutación de los subíndices de las columna y el signo - en caso contrario. Se indica $\det(A)$ o $|A|$.

Determinante de un conjunto de vectores
Dado un conjunto de n vectores de un espacio vectorial de dimensión n, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, su determinante es el determinante de la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Determinante de un endomorfismo
Determinante de la matriz asociada al endomorfismo.

Diagonal principal
La diagonal principal de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n es la sucesión $a_{11}\ a_{22}\ ...\ a_{nn}$.

Diagonal secundaria
La diagonal secundaria de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n es la siguiente sucesión $a_{1\,n}\ a_{2\,n-1}\ ...\ a_{n\,1}$.

Diagonalización
Dada matriz cuadrada A, es el proceso de búsqueda de una matriz diagonal B semejante a A, y de la matriz de paso P.

Dimensión de un espacio vectorial
Número de vectores que forman una base cualquiera de un espacio vectorial $V \neq 0$. Se indica $\dim(V)$.

Dimensión de una matriz
La dimensión de una matriz $A = (a_{ij})$ donde i varía de 1 a m y j de 1 a n es mxn.

Dirección de un vector fijo
Dirección de la recta que une los puntos origen y extremo del vector fijo.

Dirección de un vector libre
Dirección común de todos los vectores fijos que pertenecen a su clase de equivalencia.

E

Ecuación
Igualdad que relaciona varios elementos desconocidos o incógnitas.

Ecuación característica
Dada una matriz cuadrada A, su ecuación característica es la ecuación $|A-\lambda I|=0$.

Ecuación cartesiana del plano
Ecuación del plano donde los puntos del mismo son los que verifican una relación lineal en tres variables.

Ecuación paramétrica de la recta
Ecuación de la recta donde los puntos de la misma están expresados en función de un parámetro.

Ecuación paramétrica del plano
Ecuación del plano donde los puntos del mismo están expresados en función de dos parámetros.

Ecuación vectorial de la recta
Ecuación de la recta donde los puntos de la misma están expresados en función de un punto y del vector director de la recta.

Ecuación vectorial del plano
Ecuación del plano donde los puntos del mismo están expresados en función de un punto del mismo y de dos vectores linealmente independientes.

Ecuaciones cartesianas de un subespacio
Sistema de ecuaciones lineales que verifican que.

1. Las soluciones del sistema son vectores del subespacio.
2. Cualquier vector del subespacio es solución del sistema.

Ecuaciones del cambio de base
Ecuaciones que permiten pasar de las coordenadas de un vector $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$, respecto a una base B' a coordenadas respecto a la base B, $(x_1, x_2, ..., x_n)$, mediante la matriz del cambio de base.

$$x = Qx'$$

Ecuaciones implícitas de un subespacio
Ecuaciones en las que un subespacio de un espacio vectorial está determinado como los vectores que cumplen una relación, que sólo depende de los vectores.

Ecuaciones paramétricas de un subespacio
Ecuaciones en las que un subespacio de un espacio vectorial está determinado como los vectores que cumplen una relación que depende de un(os) parámetro(s). Para $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, base del espacio vectorial V, cualquier vector x del subespacio se puede expresar como

$$x = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + ... + a_n \cdot e_n$$

para parámetros $a_1, a_2, ..., a_n$.

Ejes del sistema cartesiano de referencia
En el espacio euclídeo E_3, son las rectas de posición de los vectores de la base e_1, e_2, e_3.

Elemento
Cada uno de los objetos que pertenecen a un conjunto.

Elemento neutro
El elemento neutro e de una operación * es el elemento que verifica que, para cualquier otro elemento a del conjunto.

$$a * e = e * a = a$$

Elemento pivote
Elemento de la tabla del método simplex que está en la columna pivote y en la fila pivote.

Elemento simétrico
El elemento simétrico b de un elemento a respecto a una operación * aquel elemento que verifica que

$$a * b = b * a = e$$

si e es el elemento neutro.

Eliminación de parámetros
Método que permite pasar de las ecuaciones paramétricas a las ecuaciones implícitas.

Endomorfismo
Aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

Envolvente lineal
Conjunto formado por todas las combinaciones lineales de todos los elementos de un conjunto $S \subset V$, donde V es un espacio vectorial. Normalmente se representa como $<S>$.

Escalar
Elemento del cuerpo que proporciona estructura de espacio vectorial. En esta asignatura el cuerpo que consideramos generalmente es $\mathbb{R}$, por lo que los escalares son los números reales.

Espacio imagen
Conjunto imagen.

Espacio vectorial
Dado un conjunto V, se dice que tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso), si

1. V es un grupo abeliano respecto a la suma.
2. Para cualesquiera elementos a y b de K y u y v de V, para el producto por un escalar se cumplen las propiedades.

   a. Asociativa de escalares $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$
   b. Elemento neutro de escalares $1 \cdot u = u$
   c. Distributiva respecto a la suma de vectores $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
   d. Distributiva respecto a la suma de escalares $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

Espacio vectorial euclídeo
Espacio vectorial real en donde hay definido un producto escalar.

Espacio vectorial finito
Espacio vectorial que admite un sistema de generadores finito.

Estructura algebraica
$(A, *, \cdot, ...)$ es una estructura algebraica si A es un conjunto en el que se han definido una o más operaciones $*, \cdot, ...$

Expresión analítica de una aplicación lineal
Dada una aplicación lineal $f: V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W sobre $\mathbb{R}$, definida como

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m)$$

su expresión analítica es $Y = AX$, o

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde A es la matriz asociada a la aplicación lineal.

Expresión en forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales
Ver sistema de ecuaciones lineales.

Expresión matricial del problema de programación lineal
Dado un problema de programación lineal su expresión matricial, tras introducir las variables de holgura $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ es

$$\begin{cases} \text{óptimo } F = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_{n+m}\, x_{n+m} \\ Ax = b \end{cases}$$

donde

$x = (x_1, \ldots, x_{n+m})^t$ es el vector de las variables.
$c = (c_1, \ldots, c_{n+m})$ es el vector de costes.
A es una matriz de dimensiones $nx(n+m)$.
$b = (b_1, \ldots, b_m)^t$ es un vector de n componentes.

Extremo
Vértice.

F

Factorización *LU*
Dada una matriz cuadrada A, se puede expresar como producto de dos matrices LU, tal que U es una matriz triangular superior y L contiene información sobre las transformaciones que es necesario realizar a A para transformarla en U.

Fila
En una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensiones mxn, la fila i-ésima de A es la familia $(a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in})$.

Fila objetivo
Fila de la la tabla del método simplex que tiene como entradas los coeficientes de la función objetivo escrita en la forma

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0$$

Fila pivote
En la tabla del método simplex es la fila que va a ser utilizada para la conversión de la columna pivote en básica.

Forma bilineal
Aplicación bilineal $f : UxV \to K$ en donde el conjunto imagen es el cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso).

Ver matriz asociada a la forma bilineal.

Forma bilineal antisimétrica
Forma bilineal $f : VxV \to \mathbb{R}$ donde $f(u, v) = -f(v, u)$ para cualesquiera u, v de V.

Forma bilineal asociada a la forma cuadrática
Forma bilineal simétrica f definida, para $u = v$, por $f(u, u) = Q(u)$, si Q es una forma cuadrática.

Forma bilineal degenerada

Forma bilineal degenerada por la izquierda que es a la vez forma bilineal degenerada por la derecha.

Forma bilineal degenerada por la derecha

Una forma bilineal $f : V \times V \to K$ (K es $\mathbb{R}$ en nuestro caso) es degenerada por la derecha si existe un vector v de V, distinto de cero, tal que $f(u, v) = 0$ para todo u de V.

Forma bilineal degenerada por la izquierda

Una forma bilineal $f : V \times V \to K$ (K es $\mathbb{R}$ en nuestro caso) es degenerada por la izquierda si existe un vector v de V, distinto de cero, tal que $f(v, u) = 0$ para todo u de V.

Forma bilineal no degenerada

Forma bilineal regular.

Forma bilineal real

Forma bilineal donde $U = V = \mathbb{R}$.

Forma bilineal regular

Forma bilineal que no es forma bilineal degenerada.

Forma bilineal simétrica

Forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ donde $f(u,v) = f(v, u)$ para cualesquiera u, v de V.

Forma bilineal simétrica real

Forma bilineal simétrica con $V = \mathbb{R}^n$.

Forma cuadrática

Dado un espacio vectorial V y una forma bilineal simétrica f de V en $\mathbb{R}$, se llama forma cuadrática a la aplicación $Q : V \to \mathbb{R}$ definida por $f(u, u) = Q(u)$ para u en V. f es la forma bilineal asociada a la forma cuadrática.

Forma cuadrática canónica

Forma cuadrática Q que es de la forma

$$Q(x_1, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2$$

Forma cuadrática definida negativa

Forma cuadrática Q que verifica que $-Q$ es definida positiva.

Forma cuadrática definida positiva

Forma cuadrática Q que verifica que para todo elemento v de V distinto de cero es $Q(v) > 0$.

Forma cuadrática indefinida

Forma cuadrática Q que verifica que existen u y v elementos de V con $Q(u) > 0$ y $Q(v) < 0$.

Forma cuadrática semidefinida negativa
Forma cuadrática Q que verifica que $-Q$ es semidefinida positiva.

Forma cuadrática semidefinida positiva
Forma cuadrática Q que verifica que para todo elemento v de V distinto de cero es $Q(v) \geq 0$.

Función econónica
Función objetivo.

Función lineal
Aplicación lineal.

Función objetivo
Función lineal que debe ser minimizada o maximizada (optimizada) restringida a un conjunto convexo de puntos de un problema de programación lineal. Se escribe generalmente de la forma

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

G

Generador de un conjunto
Un conjunto de vectores S es un generador de otro conjunto de vectores C, si todos los vectores de C se pueden representar como combinación lineal de vectores de S.

Grupo
Conjunto G con una operación * definida en él que verifica

1. la operación es asociativa, es decir $(a*b)*c = a*(b*c)$ para a,b,c elementos de G
2. existe un elemento neutro e en G, es decir para cualquier a de G se verifica $a*e = e*a = a$
3. cada elemento a de G posee simétrico, es decir, existe b tal que $a*b = b*a = e$.

Grupo abeliano
Grupo donde la operación definida en él es además conmutativa, es decir, para a y b elementos del grupo cualesquiera se verifica que $a*b = b*a$.

Grupo conmutativo
Grupo abeliano.

H

Hiperplano
Subespacio vectorial de dimensión n-1 de un espacio vectorial V de dimensión n.

Homomorfismo
En general, a lo largo de esta asignatura, los homomorfismos son las aplicaciones lineales.

I

Imagen
Para a elemento de A, es el elemento b de B que le corresponde por la aplicación.

Imagen de una aplicación lineal
Dada una aplicación lineal $f: U \to V$ entre dos espacios vectoriales U y V, su imagen es el subespacio de V formado por los vectores de V que son imagen por f de un vector de U, es decir, es

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in V / \exists u \in U \text{ con } f(u) = v\}$$

Incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales
Las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales son los elementos x_j, para j variando de 1 a n.

Inecuación lineal
Desigualdad lineal.

Inecuación superflua
Desigualdad superflua.

Invariantes de una forma cuadrática
Propiedades de la matriz asociada a la forma cuadrática que no dependen de la base considerada en el espacio vectorial.

Inversiones de una permutación
Dos elementos de una permutación están en inversión cuando el orden en que figuran dichos elementos es distinto del orden en que figuran en la permutación principal $(1, 2, ..., n)$.

Isomorfismo
Es una aplicación lineal biyectiva, y conserva la estructura de espacio vectorial.

L

Ley de composición
Operación.

Ley de composición externa
Operación definida entre los elementos de dos conjuntos V y K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso) cuyo resultado es un elemento del conjunto V.

Ley de composición interna
Operación definida entre los elementos de un conjunto V, cuyo resultado es un elemento del conjunto V.

Linealmente dependiente
Conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ donde uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Linealmente independiente
Conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ donde el vector nulo no se puede expresar como combinación lineal de los vectores del conjunto, excepto si son cero todos los coeficientes.

Longitud de un vector
Módulo de un vector de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar.

L (*V*, *W*)
Conjunto de todas las aplicaciones lineales posibles entre dos espacios vectoriales V y W sobre $\mathbb{R}$, donde V es de dimensión n y W es de dimensión m. Es un espacio vectorial de dimensión $n \times m$.

M

Matrices congruentes
Dos matrices cuadradas de orden n, A y B son congruentes cuando existe una matriz cuadrada de orden n no singular P, tal que $A = P^tBP$.

Matrices equidimensionales
Dos matrices son equidimensionales si tienen igual número de filas y de columnas.

Matrices equivalentes
Matrices (vistas como matrices asociadas a la aplicación lineal) que representan el mismo endomorfismo aunque se cambien las bases en el espacio vectorial.

Matrices semejantes
Dos matrices cuadradas de orden n, A y B son semejantes cuando existe una matriz regular de orden n, P, tal que $A = P^{-1}BP$. P se llama matriz de paso.

Matriz
Dados dos conjuntos finitos de números naturales $I = \{1, 2, ..., m\}$ y $J = \{1, 2, ..., n\}$, una matriz de dimensiones o tamaño m por n (indicado mxn) es una aplicación de IxJ en un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso). Si los elementos de K se denotan como a_{ij}, la matriz se puede representar como $A = (a_{ij})$, con i elemento de I y j elemento de J. Se suele representar como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} son los elementos de la matriz.

Matriz adjunta
Matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto correspondiente.

Matriz antisimétrica
Matriz hemisimétrica.

Matriz asociada a una aplicación lineal
Si V y W son dos espacios vectoriales sobre R, $f: V \to W$ una aplicación lineal entre ellos, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V y $B' = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ una base de W, se llama matriz asociada a la aplicación lineal f respecto a las bases B y B' al conjunto A de elementos ordenados en una matriz de m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + ... + a_{m1} \cdot u_n \\ f(e_2) &= a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + ... + a_{m2} \cdot u_n \\ &... \\ f(e_n) &= a_{1n} \cdot u_1 + a_{2n} \cdot u_2 + ... + a_{mn} \cdot u_n \end{aligned}$$

Matriz asociada a una forma bilineal
Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ y $B = \{e_1, ..., en\}$ una base de V, se considera la forma bilineal $f: V \times V \to \mathbb{R}$. La matriz asociada $A = (a_{ij})$ a f es la matriz cuadrada de orden n donde sus elementos están determinados por

$$a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

Matriz asociada a una forma cuadrática
Matriz asociada a la forma bilineal asociada a la forma cuadrática.

Matriz columna
Matriz de dimensiones $m \times 1$.

Matriz cuadrada
Matriz con igual número de filas que de columnas.

Matriz de Gram
Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de V, es posible escribir el producto escalar entre dos vectores $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ $u \cdot v$ en forma matricial como

$$u \cdot v = (u_1, u_2, ..., u_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

si $e_i \cdot e_j = g_{ij}$. De forma abreviada se puede escribir

$$u \cdot v = xGy^t$$

y G es la matriz de Gram.

Matriz de las incógnitas
Es la matriz columna formada por las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales. Se denota X.

Matriz de los coeficientes
En un sistema de ecuaciones lineales, es una matriz de la forma $A = (a_{ij})$, para i de 1 a m y j de 1 a n, donde a_{ij} es el coeficiente de la incógnita j en la ecuación i.

Matriz de los términos independientes
Es la matriz columna formada por los términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales. Se denota B.

Matriz de paso
Ver matrices semejantes.

Matriz del cambio de base
Dadas dos bases B y B' de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, existe un endomorfismo tal que la imagen de cada vector expresado en B' es la expresión del mismo en B. La matriz asociada Q al mismo es la matriz del cambio de base. Sus columnas son las coordenadas de los vectores de B' respecto a B.

Matriz diagonal
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, donde para $i \neq j$ es $a_{ij} = 0$

Matriz diagonalizable
Una matriz cuadrada A que es semejante a una matriz diagonal B. Es equivalente a decir que existe una matriz regular P, tal que $A = P^{-1}BP$.

Matriz elemental
Matriz cuadrada que se obtiene de la matriz unidad al efectuar una sola operación elemental en sus filas.

Matriz escalar
Matriz cuadrada en la que son cero todos los elementos excepto los de la diagonal principal, que son iguales.

Matriz escalonada por columnas
Una matriz A es escalonada por columnas si su matriz traspuesta A^t es escalonada por filas.

Matriz escalonada por filas
Una matriz es escalonada por filas si:

1. El elemento $a_{11} = 1$ (aunque algunos autores sólo piden que $a_{11} \neq 1$).
2. Cada fila se inicia con una sucesión de ceros.
3. La sucesión de ceros que inicia cada fila tiene algún cero más que la que inicia la fila anterior.
4. El primer elemento distinto de cero de cada fila (si lo hay) es 1 (o distino de 0 si sólo se pide que $a_{11} \neq 1$), y se llama cabecera de la fila.
5. Las filas que tiene cero todos sus elementos son las últimas.
6. En cada columna, los elementos que quedan por debajo del que sirve de cabecera de fila son ceros.

Matriz fila
Matriz de dimensiones $1 \times n$.

Matriz hemisimétrica
Matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = -a_{ij}$ para todo i y j.

Matriz invertible
Matriz cuadrada que posee inversa, es decir, matriz regular.

Matriz inversa de una matriz cuadrada
Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, su inversa es la matriz A^{-1} que verifica $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, donde I es la matriz unidad de orden n.

Matriz métrica
Matriz de Gram.

$M_{m \times n}$
Conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$.

Matriz no singular
Matriz regular.

Matriz ortogonal
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, se dice que es ortogonal si $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$, donde I es la matriz unidad de orden n. Es equivalente a decir que $A^t = A^{-1}$.

Matriz rectangular
Matriz con distinto número de filas que de columnas

Matriz regular
Matriz cuadrada cuyo determinante es distinto de cero, es decir, que posee inversa.

Matriz simétrica
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y j.

Matriz singular
Matriz cuadrada cuyo determinante es cero, es decir, que no posee inversa.

Matriz transpuesta
Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensiones nxm, su transpuesta es la matriz $A^t = (a_{ji})$, de dimensiones mxn.

Matriz triangular inferior
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, donde para $i < j$ es $a_{ij} = 0$.

Matriz triangular superior
Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, donde para $i > j$ es $a_{ij} = 0$.

Matriz unidad
Matriz cuadrada en la que son cero todos los elementos excepto los de la diagonal principal, que son uno.

Matriz unitaria
Matriz unidad.

Menor
Dada la matriz A de dimensión mxn, los menores de orden h de A son los determinantes de las submatrices cuadradas de orden h de A.

Menor complementario
Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, el menor complementario del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ que resulta al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima en A.

Menor complementario de una submatriz de una matriz cuadrada
Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, el menor complementario de la submatriz de orden h formado por las filas $i_1, i_2, \ldots, i_h$ y las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_h$, es decir, es el menor de orden n-h formado por las filas $i_{h+1}, i_{h+2}, \ldots, i_n$ y las columnas $j_{h+1}, j_{h+2}, \ldots, j_n$.

Menor de una matriz cuadrada
Dada la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n, el menor de orden h formado por las filas $i_1, i_2, \ldots, i_h$ y las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_h$ es el determinante de la matriz que resulta de suprimir en A las n-h filas distintas de $i_1, i_2, \ldots, i_h$ y las columnas distintas de $j_1, j_2, \ldots, j_h$.

Método de eliminación por igualación
Método de eliminación para la resolución de sistema de ecuaciones lineales basado en la eliminación de uno de los parámetros.

Método de eliminación por sustitución
Método de eliminación para la resolución de sistema de ecuaciones lineales basado en la sustitución de uno de los parámetros.

Método de Gauss
Método que permite resolver un sistema de ecuaciones lineales por eliminación de incógnitas. Ver Capítulo 4 de las Unidades Didácticas.

Método de Gram-Schmidt
Método que permite obtener, a partir de un sistema de vectores de un espacio vectorial, una base del mismo formada por vectores ortonormales.

Método matricial de eliminación
Método de eliminación para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales basado en las propiedades de las matrices.

Método Simplex
Método de cálculo numérico que introduce una mecánica de resolución de un problema de programación lineal. Ver Capítulo 8 de las Unidades Didácticas.

Módulo de un vector
Norma euclídea de un vector.

Módulo de un vector fijo
Distancia entre los puntos origen y extremo de un vector fijo. Se denota como $|AB|$.

Módulo de un vector libre
Módulo común de todos los vectores fijos que pertenecen a su clase de equivalencia.

Multiplicidad algebraica de un autovalor
Multiplicidad del autovalor como raíz característica.

Multiplicidad geométrica de un autovalor
Dimensión del subespacio vectorial asociado al autovalor.

N

Norma de un vector
Dado un vector v de un espacio vectorial euclídeo $(V, <\cdot, \cdot>)$, su norma $||x||$ es el número real no negativo que verifica $||x||^2 = <x, x>$, es decir, es la raíz positiva del producto escalar de un vector consigo mismo.

Norma euclídea de un vector
Norma de un vector con el producto escalar estándar.

Núcleo de una aplicación lineal
Dada una aplicación lineal $f: U \to V$ entre dos espacios vectoriales U y V, su núcleo es el subespacio de V formado por los vectores cuya imagen es el vector nulo de V, es decir, es

$$\text{Nuc}(f) = \{u \in U / f(u) = 0\}$$

O

Operación
Aplicación que a dos elementos (de distinto o del mismo conjunto) les asigna otro de uno de los conjuntos iniciales.

Operación externa
Ley de composición externa.

Operación interna
Ley de composición interna.

Operaciones elementales en las filas o columnas de una matriz
Son las operaciones que permiten el paso de una matriz a otra equivalente. Son:

1. Permutación o intercambio de filas (o columnas).
2. Sustituir una fila (o columna) por ella misma más una combinación lineal de las otras.
3. Multiplicar una fila (o columna) por un escalar.

Optimizar
Determinar los valores máximos o mínimos (valores óptimos) de una función lineal en un conjunto convexo de puntos.

Óptimo
Valores máximos o mínimos de un problema de programación lineal.

Orden de una matriz cuadrada
Número de filas o de columnas de una matriz cuadrada.

Orientación positiva
Los vectores de una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de un espacio vectorial de dimensión 3, V_3, tienen orientación positiva cuando al llevar el vector e_1 hacia el vector e_2, un sacacorchos avanzaría en el sentido del vector e_3 (conocido esto como la regla del sacacorchos).

Origen de coordenadas
Origen de vectores de un sistema cartesiano de referencia del espacio.

Original
Antiimagen.

P

Permutación
Una permutación de n elementos es una posible ordenación que se puede formar con estos elementos. Se puede definir también como una aplicación biyectiva $\sigma : S \to S$, donde $S = \{1, 2, ..., n\}$.

Permutación de clase impar
Permutación con un número impar de inversiones.

Permutación de clase par
Permutación con un número par de inversiones.

Permutación principal
Cualquier permutación fijada previamente; suele ser la que presenta los elementos en orden natural $(1, 2, ..., n)$.

Pivote
Al transformar una matriz en una matriz escalonada por filas, el pivote es el primer elemento de la fila que se emplea como referencia en cada paso, que es distinto de cero, y que está situado en la cabecera de la fila. En una matriz escalonada hay tantos pivotes como filas distintas de cero.

Plano vectorial
Subespacio vectorial de dimensión 2.

Polinomio característico
Primer miembro de la igualdad de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$. Representa un polinomio de grado n, siendo A una matriz cuadrada de orden n.

Problema de programación lineal
Problema donde hay que calcular los óptimos de la función lineal

$$\text{óptimo } F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \quad ... \quad ... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s \\ a_{s+1,1}x_1 + a_{s+1,2}x_2 + ... + a_{s+1,n}x_n = b_{s+1} \\ ... \quad ... \quad ... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n \leq b_r \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + ... + a_{r+1,n}x_n \geq b_{r+1} \\ ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

con x_i y b_j no negativas. La función F es la función objetivo y las igualdades y desigualdades lineales son las restricciones.

Producto cartesiano
Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los pares ordenados de la forma (x,y) con x elemento de A e y elemento de B forman un tercer conjunto, designado como AxB, que es su producto cartesiano

Producto de una aplicación lineal por un escalar
Si $f \in L(V,W)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es la aplicación lineal definida como

$$(\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v)$$

Producto de matrices
Si A y B son las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g respectivamente, su producto $A \cdot B$ es la matriz asociada a $(f \cdot g)$. Si $A = (a_{ik}) \in M_{m\times p}$ y $B = (b_{jk}) \in M_{p\times n}$, entonces $A \cdot B = (c_{ij}) \in M_{m\times n}$, donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Producto escalar
Dado un espacio vectorial V_n real, de dimensión n, el producto escalar es una forma bilineal simétrica no degenerada, es decir, dados vectores x, y y z de V_n y un escalar a, su producto escalar $x \cdot y$ es un número real y se verifica

1. Bilineal $(ax)\cdot y = a(x \cdot y)$
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. Simétrica $x \cdot y = x \cdot y$
4. No degenerada $x \cdot x \geq 0$ y $x \cdot x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Producto exterior
Producto vectorial.

Producto mixto
Dado un espacio vectorial V_3 de dimensión 3 y dados tres vectores x, y, z de V_3, su producto mixto es el número real que se obtiene como

$$(x * y) \cdot z$$

Producto vectorial
Dado un espacio vectorial V_3 de dimensión 3 y una base orientada positivamente, el producto vectorial de dos vectores x e y, denotado $x*y$, es la operación que hace corresponder a éste para un vector z que verifica

1. $|z| = |x||y|\text{sen}(x,y)$ con $\text{sen}(x,y)$ el número positivo que verifica $\text{sen}^2(x,y) = 1\text{-}\cos^2(x,y)$
2. Si z no es un vector nulo, entonces es ortogonal al plano generado por x e y
3. Si z no es un vector nulo, entonces la base $\{x, y, z\}$ tiene la misma orientación que B.

Propiedad asociativa
Una operación * cumple la propiedad asociativa si para cualquiera elementos a, b, c se verifica que

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$

Propiedad conmutativa
Una operación * cumple la propiedad conmutativa si para cualquiera elementos a, b se verifica que

$$a*b = b*a*$$

Propiedad distributiva
Una operación & cumple la propiedad distributiva respecto a otra * si para cualesquiera elementos a, b, c se verifica que

$$a\&(b*c) = (a\&b)*(a\&c)$$

Propiedad recíproca
Si un elemento a está relacionado con un elemento b, entonces b también está relacionado con a.

Propiedad reflexiva
Todo elemento está relacionado consigo mismo.

Propiedad simétrica
Propiedad recíproca.

Propiedad transitiva
Si un elemento a está relacionado con un elemento b, que a su vez está relacionado con c, entonces a también está relacionado con c.

Proyección
Dado un espacio vectorial V que se puede descomponer como suma directa de dos subespacios vectoriales U_1 y U_2, una proyección es la aplicación $p : V \to U_i$ que a cada vector $v = u_1 + u_2$ (para $u_i \in U_i$) le asigna $p(v) = u_i$.

Proyección ortogonal
Dado un espacio vectorial euclídeo V, la proyección ortogonal de un vector u sobre otro vector v de dicho espacio es

$$\text{Proy}\, u_v = \frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2} v$$

Punto extremo
En un programa de programación lineal, es el vértice.

Punto extremo de un vector fijo
Ver vector fijo.

Punto origen de un vector fijo
Ver vector fijo.

R

Raíz característica
Cada una de las soluciones de la ecuación característica. Son los autovalores del endomorfismo asociado a A.

Rango de un sistema de vectores
Dado un conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de un espacio vectorial es el mayor número de vectores linealmente independientes del sistema. Se representa como $\text{rang}\{u_1, u_2, ..., u_n\}$

Rango de una aplicación lineal
Dada una aplicación lineal $f: U \to V$ entre dos espacios vectoriales U y V, su rango es la dimensión del subespacio imagen $\text{Im}(f)$.

Rango de una forma cuadrática
Rango de cualquier matriz asociada a la forma cuadrática.

Rango de una matriz
Mayor orden de las submatrices de dicha matriz.

Recta vectorial
Subespacio vectorial de dimensión 1.

Rectas coincidentes
Rectas con los mismos vectores directores y que coinciden en todos los puntos.

Rectas paralelas
Rectas con los mismos vectores directores y que no coinciden en ningún punto.

Rectas secantes
Rectas que se cortan en un punto.

Región factible
Convexo solución.

Región de posibilidad
Convexo solución.

Regla de Cramer
Regla que permite estudiar si un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, indeterminado o incompatible. Ver Capítulo 4 de las Unidades Didácticas.

Relación de congruencia
Relación de equivalencia en la que cada clase de equivalencia la forman matrices congruentes.

Relación de equivalencia
Relación entre los elementos de un conjunto que verifica las propiedades reflexiva, recíproca y transitiva.

Relación de semejanza
Relación de equivalencia en la que cada clase de equivalencia la forman matrices semejantes.

Resolver un sistema
Hallar todas la soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Restricciones
Dado un problema de programación lineal, las restricciones son las igualdades y desigualdades lineales que tienen que verificar las soluciones del problema.

Restricción superflua
Restricción de un problema de programación lineal cuya exclusión no modifica la región factible.

S

Segmento
Un segmento de extremos P_1 y P_2 es el conjunto de todas la combinaciones lineales convexas de P_1 y P_2.

Sentido de un vector fijo
Sentido determinado por un vector fijo sobre la dirección del mismo.

Signatura de la forma cuadrática
Para una forma cuadrática Q, su signatura ($sign(Q)$) es el par (p,q), donde p es el número de elementos positivos que posee la diagonal principal de cualquier matriz diagonal asociada a Q y q es el número de elementos negativos de la misma.

Sistema cartesiano de referencia del espacio
Es el conjunto formado por un punto del espacio E_3 (llamado origen de vectores) y una base del espacio vectorial V_3 de dimensión 3. Generalmente es denotado como $\{0; e_1, e_2, e_3\}$.

Sistema compatible
Sistema de ecuaciones lineales que tiene solución.

Sistema compatible determinado
Sistema compatible de ecuaciones lineales que tiene solución única.

Sistema compatible indeterminado
Sistema compatible de ecuaciones lineales que tiene solución, pero no es única.

Sistema de Cramer
Sistema de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y con la matriz de los coeficientes de las incógnitas es una matriz regular.

Sistema de desigualdades lineales
Conjunto formado por desigualdades lineales.

Sistema de ecuaciones lineales
Es un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \ldots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

Los números a_{ij}, para i de 1 a m y j de 1 a n, se llaman coeficientes de las incógnitas.

x_j, para j de 1 a n, se llaman incógnitas.
b_i, para i de 1 a m, se llaman términos independientes.

En forma matricial se puede expresar como

$$AX = B$$

donde para $i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots, m$

$A = (a_{ij})$ es la matriz de los coeficientes $X = (x_j)$ es la matriz de las incógnitas y $B = (b_j)$ es la matriz de los términos independientes.

Sistema de generadores
Conjunto generador de un conjunto.

Sistema de generadores linealmente dependientes
Sistema de generadores, cuyos vectores son linealmente dependientes.

Sistema de generadores linealmente independientes
Sistema de generadores, cuyos vectores son linealmente independientes.

Sistema de vectores
Conjunto de vectores.

Sistema de vectores linealmente dependientes
Sistema de vectores, cuyos vectores son linealmente dependientes.

Sistema de vectores linealmente independientes
Sistema de vectores, cuyos vectores son linealmente independientes.

Sistema homogéneo
Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si la matriz de los términos independientes tiene todos sus elementos iguales a cero.

Sistema incompatible
Sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución.

Sistema inestable
Sistema de ecuaciones lineales en los que una pequeña variación de los coeficientes produce una gran variación en las soluciones.

Sistema mal condicionado
Sistema inestable.

Sistema no homogéneo
Un sistema de ecuaciones lineales que no es homogéneo, es decir, si la matriz de los términos independientes no tiene todos sus elementos iguales a cero.

Sistema normado
Sistema de vectores S de un espacio vectorial euclídeo V tal que todos sus vectores son unitarios.

Sistema ortogonal
Sistema de vectores S de un espacio vectorial euclídeo V tal que cualquier vector es ortogonal a todos los demás vectores de S.

Sistema ortonormado
Sistema de vectores S de un espacio vectorial euclídeo V que es ortogonal y normado.

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes
Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales
Si la expresión en forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales es $A \cdot X = B$, se dice que una matriz S de dimensiones nx1 es solución del sistema si verifica que $A \cdot S = B$.

Solución factible
Solución de un problema de programación lineal que verifica que el punto ensayado como solución satisface el conjunto de ecuaciones del sistema de desigualdades lineales.

Solución factible básica
Solución factible donde las coordenadas del punto ensayado como solución son, a lo sumo, distintas de cero tantas como el número de ecuaciones del sistema de desigualdades lineales.

Solución básica no degenerada
Solución factible básica donde las coordenadas del punto ensayado como solución son distintas de cero exactamente tantas como el número de ecuaciones del sistema de desigualdades lineales.

Solución óptima
Solución factible que optimiza la función objetivo de un problema de programación lineal.

Solución trivial
Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo sólo posee la solución trivial si una solución del sistema es que todas las incógnitas sean iguales a cero.

Subconjunto
Dado un conjunto, un subconjunto es otro conjunto contenido en él.

Subespacio engendrado por un conjunto de vectores
Dado un conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso), es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de S. Se representa por $C(S)$.

Subespacio imagen
Imagen de la aplicación lineal.

Subespacio núcleo
Núcleo de la aplicación lineal.

Subespacio suma
Dados dos subespacios vectoriales U_1 y U_2, de un espacio vectorial, su suma es el menor subespacio que contiene a U_1 y U_2.

Subespacio suplementario
Dado un subespacio vectorial U_1 de un espacio vectorial V, su subespacio suplementario es U_2 si $V = U_1 \oplus U_2$.

Subespacio vectorial
Son los subconjuntos U de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ en nuestro caso) que poseen a la vez estructura de espacio vectorial sobre K, respecto a las mismas leyes de composición de V.

Subespacios ortogonales
Dados dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial euclídeo son ortogonales si y sólo si todo vector de uno de ellos es ortogonal a todo vector del otro.

Subgrupo
Un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo de G si el producto o suma (operación con la que G tiene estructura de grupo) de dos elementos de H está en H y además es un grupo con la misma operación que G.

Submatriz
Dada una matriz A de dimensión mxn, una submatriz es la matriz que resulta de suprimir las filas $i_1, i_2, ..., i_h$ y las columnas $j_1, j_2, ..., j_k$. Es decir, es la matriz formada por los elementos comunes a las filas $i_{h+1}, i_{h+2}, ..., i_m$ y a las columnas $j_{k+1}, j_{k+2}, ..., j_n$.

Suma de aplicaciones lineales
Si f y g pertenecen a $L(V,W)$, su suma es la aplicación lineal definida como

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

Suma directa de dos subespacios vectoriales
Dados dos subespacios vectoriales U_1 y U_2, su suma directa (indicada $U_1 \oplus U_2$) es el conjunto de vectores u que verifican que $u = u_1 + u_2$, donde $u_i \in U_i$ y esta descomposición es única.

T

Términos independientes
Son los términos $b_1, b_2, \ldots, b_m$ para j variando de 1 a m en un sistema de ecuaciones lineales

Test de maximalidad
En el algoritmo simplex, es el test que permite determinar si se ha alcanzado la solución óptima de un problema de programación lineal

Tamaño de una matriz
Dimensión de una matriz.

Transformación lineal
Aplicación lineal.

Transformación ortogonal
Dado un espacio vectorial V con un producto escalar $<\cdot,\cdot>$; y un endomorfismo sobre V, f es una transformación ortogonal si para elementos u y v de V cualesquiera, se verifica que

$$<f(u),f(v)> = <u,v>$$

Transposición
Determinación de la matriz transpuesta

V

Valor óptimo
Ver optimizar.

Valor propio
Autovalor.

Variable básica
En el método simplex, es la variable que corresponde a las componentes distintas de 0 de una solución básica de un problema de programación lineal.

Variables de holgura
Variables artificiales positivas, distintas para cada desigualdad de un sistema de desigualdades lineales, con significado concreto dentro del contexto del programa y que convierten las desigualdades de un problema de programación lineal en igualdades.

Vector
Elemento de un espacio vectorial

Vector director
Vector que determina la dirección de una recta

Vector fijo
Dado el espacio tridimensional E y dos puntos de él, A y B, el vector fijo AB es el vector que tiene por origen el punto A y extremo el punto B. A es el punto origen y B es el punto extremo.

Vector libre
Cada una de las clases de equivalencia de los vectores equipolentes entre sí determinada por los vectores fijos del espacio.

Vector libre nulo
Vector libre de módulo cero y que carece de dirección.

Vector normado
Vector unitario

Vector normalizado
Vector unitario

Vector nulo
Vector que es el elemento neutro de la suma en el espacio vectorial.
Ver vector libre nulo

Vector propio
Autovector

Vector suma
Dados dos vectores u y v de un espacio vectorial V, el vector suma w es el vector que se obtiene sumando las coordenadas de u y v que ocupan el mismo lugar.

Vector unitario
Vector cuya norma es uno.

Vectores conjugados
Dos vectores u y v de un espacio vectorial V son conjugados respecto a una forma cuadrática Q definida sobre V si para la forma bilineal simétrica asociada a Q se verifica que $f(u,v) = 0$.

Vectores equipolentes
Vectores fijos con la misma dirección, modulo y sentido.

Vectores linealmente dependientes
Ver linealmente dependientes

Vectores linealmente independientes
Ver linealmente independientes.

Vectores ortogonales
Vectores no nulos cuyo producto escalar es cero.

Vectores ortonormados
Vectores ortonormales.

Vectores ortonormales
Vectores ortogonales de norma uno.

Vértice
Un punto P de un conjunto convexo C es un vértice si no se puede expresar como combinación lineal convexa de otros dos puntos cualquiera de C, distintos de P.